

Evaluation de l'influence  
d'une constante cosmologique non-nulle  
sur la répartition  
des arcs gravitationnels  
dans les amas de galaxies

Emmanuel Quémener

Juin 1994



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Différents regards sur la constante cosmologique</b>	<b>11</b>
2.1	La Constante Cosmologique sous le regard du Temps . . . . .	12
2.1.1	Un premier modèle de cosmologie newtonienne . . . . .	12
2.2	Les débuts d'une Cosmologie Relativiste . . . . .	13
2.2.1	Modèle cosmologique d'Einstein . . . . .	13
2.2.2	Un univers en expansion . . . . .	14
2.2.3	Le renouveau de la constante cosmologique . . . . .	16
2.3	La constante cosmologique sous le regard du physicien . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Influence d'une constante cosmologique</b>	<b>21</b>
3.1	Influence sur la dynamique d'expansion . . . . .	22
3.2	Influence sur l'âge de l'univers . . . . .	23
3.3	Influence sur la mesure de distances . . . . .	25
3.4	Influence sur la densité comobile d'objets . . . . .	27
<b>4</b>	<b>L'optique gravitationnelle</b>	<b>31</b>
4.1	Introduction . . . . .	32
4.1.1	Une approche historique . . . . .	32
4.1.2	Des résultats spectaculaires . . . . .	33
4.2	Formalisme des lentilles gravitationnelles . . . . .	34
4.2.1	Cadre de travail . . . . .	34
4.2.2	Equation des lentilles . . . . .	34
4.2.3	Opérations de transformation de la lentille . . . . .	36
4.3	Application à différents types de potentiels . . . . .	38
4.3.1	Cas d'un point-masse . . . . .	39
4.3.2	Cas d'une sphère isotherme singulière . . . . .	40
4.3.3	Cas d'une sphère isotherme avec rayon de coeur . . . . .	41
4.3.4	Cas d'un ellipsoïde isotherme avec rayon de coeur . . . . .	42
4.4	Propriétés des lentilles . . . . .	43
4.4.1	Multiplicité des images . . . . .	43
4.4.2	Amplification des images . . . . .	46

4.4.3	Changement de parité . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Utilisation originale de l'optique gravitationnelle</b>	<b>49</b>
5.1	Optique gravitationnelle & constante cosmologique . . . . .	50
5.2	Une première approche à l'aide de l'équation des lentilles . . . . .	53
5.2.1	Introduction . . . . .	53
5.2.2	Une première approche heuristique . . . . .	53
5.2.3	Une approche heuristique complémentaire . . . . .	54
5.3	Une approche originale ... mais réaliste . . . . .	57
5.3.1	Une introduction à la méthode . . . . .	57
5.3.2	Allocation des paramètres initiaux . . . . .	60
5.3.3	Recherche des nouveaux paramètres de la lentille . . . . .	61
5.3.4	Calcul de la position du nuage . . . . .	63
5.3.5	Calcul de la position de la contre-image du nuage . . . . .	64
5.3.6	Une petite application . . . . .	64
5.3.7	L'utilisation d'absorbeurs multiples . . . . .	65
5.4	Incertitudes & Perturbations de notre banc d'optique . . . . .	67
5.4.1	Incertitude sur la position angulaire des images . . . . .	67
5.4.2	Incertitude sur le décalage spectral des sources . . . . .	69
5.4.3	Incertitude sur le décalage spectral de la lentille . . . . .	71
5.4.4	Incertitude sur la dispersion de vitesse de la lentille . . . . .	72
5.4.5	Incertitude sur l'épaisseur de la lentille . . . . .	75
5.4.6	Incertitude sur le rayon de coeur de la lentille . . . . .	75
5.4.7	Perturbation d'une masse défectrice autre que la lentille . . . . .	75
5.5	Conclusion . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>79</b>
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>81</b>
7.1	Différents regards sur la constante cosmologique . . . . .	82
7.1.1	Modèle de Seeliger & Neumann . . . . .	82
7.1.2	Les équations d'Einstein . . . . .	83
7.1.3	Un modèle de cosmologie relativiste selon Einstein . . . . .	85
7.1.4	Un modèle de cosmologie relativiste selon De Sitter . . . . .	87
7.1.5	Un calcul de l'énergie du vide . . . . .	88
7.2	Influence d'une constante cosmologique . . . . .	90
7.2.1	Equation des cosmologies : une nouvelle écriture . . . . .	90
7.2.2	Paramètre de décélération . . . . .	90
7.2.3	Temps séparant deux événements . . . . .	91
7.3	Premiers pas vers une mesure de distances . . . . .	92
7.3.1	Distance de mouvement propre . . . . .	95
7.3.2	Distance de diamètre angulaire . . . . .	95
7.3.3	Distance-luminosité . . . . .	96

7.4	L'optique gravitationnelle . . . . .	97
7.4.1	Potentiel projeté & Angle de déviation . . . . .	97
7.4.2	La dispersion de vitesse comme estimateur du potentiel . . . . .	99
7.5	Utilisation originale de l'optique gravitationnelle . . . . .	100
7.5.1	Anneaux d'Einstein . . . . .	100
7.5.2	Evolution du rapport des distances . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Outils Utilisés</b>	<b>105</b>
	<b>Outils Utilisés</b>	<b>105</b>



# Table des figures

3.1	Evolution du facteur d'expansion, pour un univers de courbure nulle . . . .	23
3.2	Age de l'univers . . . . .	24
3.3	Distance de mouvement propre . . . . .	26
3.4	Distance de diamètre angulaire . . . . .	27
3.5	Distance-luminosité . . . . .	28
3.6	Variation du covolume . . . . .	29
4.1	Illustration schématique d'un banc d'optique . . . . .	34
4.2	Déviation de rayons . . . . .	35
4.3	Illustration de l'équation des lentilles . . . . .	35
5.1	Profondeur optique pour deux décalages spectraux de quasar . . . . .	51
5.2	Profondeur optique pour deux univers différents . . . . .	52
5.3	Evolution de deux rayons d'Einstein . . . . .	54
5.4	Evolution du rapport des rayons d'Einstein . . . . .	55
5.5	Evolution de la dispersion de vitesse . . . . .	57
5.6	Banc d'optique proposé pour l'étude . . . . .	59
5.7	Point de vue de l'observateur . . . . .	60
5.8	Evolution de la séparation angulaire entre les deux nuages . . . . .	65
5.9	Augmentation de la séparation angulaire entre les deux images du nuages .	66
5.10	Configuration avec deux nuages . . . . .	67
5.11	Evolution de la distance angulaire séparant les deux images de cinq nuages	68
5.12	Incertitude sur la position du nuage . . . . .	69
5.13	Incertitude sur le décalage spectral du nuage . . . . .	70
5.14	Incertitude sur le décalage spectral du nuage . . . . .	71
5.15	Incertitude sur le décalage spectral de la lentille . . . . .	72
5.16	Incertitude sur le décalage spectral de la lentille . . . . .	73
5.17	Incertitude sur la dispersion de vitesse . . . . .	74
5.18	Incertitude sur le rayon de coeur . . . . .	76
7.1	Evolution du rapport de distances . . . . .	102
7.2	Evolution du rapport de distances . . . . .	103



# Chapitre 1

## Introduction

Qu'est-ce qu'un paradoxe, sinon une vérité opposée aux préjugés du vulgaire, ignorée du commun des hommes, et que l'inexpérience actuelle les empêche de sentir ? Ce qui est aujourd'hui un paradoxe pour nous sera pour la postérité une vérité démontrée.

Denis Diderot, *Essai sur les préjugés*

J'aime mieux être homme à paradoxes qu'homme à préjugés.

Jean-Jacques Rousseau, *Emile ou de l'éducation*

Choisir le paradoxe au préjugé... Tel est le parti courageux qu'un grand philosophe prit, voilà plus de deux siècles. Pourtant, à l'heure actuelle, dans la recherche telle que nous sommes en train de la vivre, les préjugés ont la peau dure et se déguisent parfois en postulats de la physique...

Ainsi en est-il de la constante cosmologique, cette vieille dame âgée de près d'un siècle, qui, après une traversée du désert de près de soixante-dix années, revient hanter notre cosmologie actuelle. Introduite arbitrairement à la fin du dix-neuvième siècle, puis déavouée par son père, la constante cosmologique revient à la charge en cette fin de siècle, ceci avec la complicité légitime de la mécanique quantique, trouvant en elle l'observable à grande échelle d'une énergie du vide.

Nous commencerons donc, dans l'étude de ce si controversé terme de la physique, par une approche historique de ce que représente cette constante depuis 1895.

A cette introduction s'ajoutera la vision que possèdent physiciens et cosmologistes de cette constante.

Puis, nous analyserons les effets d'une telle constante sur différents paramètres cosmologiques.

Ensuite, nous rappellerons certains éléments d'optique gravitationnelle, lesquels nous permettront, dans un chapitre à part entière, d'évaluer l'influence d'une constante cosmologique non nulle sur la répartition des arcs gravitationnels dans les amas de galaxies.

Enfin, nous clorons ce rapport, évoquant l'utilisation éventuelle d'une pareille méthode, tout en prenant soin de la critiquer, aussi objectivement que possible...

## Chapitre 2

# Différents regards sur la constante cosmologique

Regarder un atome le change.  
Regarder un homme le transforme.  
Regarder l'avenir le bouleverse

Gaston Berger, *Phénoménologie du temps et prospective*

## 2.1 La Constante Cosmologique sous le regard du Temps

### 2.1.1 Un premier modèle de cosmologie newtonienne

C'est autour des années 1895-1896 que fut introduite pour la première fois la constante cosmologique. A cette époque, avant les bases de la relativité restreinte puis générale, la théorie standard de la dynamique se fonde sur les trois lois introduites par Isaac Newton dans ses «Principes Mathématiques».

Deux hommes, Seeliger et Neumann, entreprennent la téméraire entreprise de trouver quelle est l'équation du mouvement d'une particule dans l'univers, à l'aide de la théorie de Newton. Pour cela, ils posent les hypothèses suivantes :

- l'univers est à symétrie sphérique.
- l'univers est, à grande échelle, assimilé à un fluide de densité isotrope.
- l'univers est statique.

Nous pouvons par ailleurs remarquer que ces hypothèses constituent un premier énoncé de ce que sera, quelques décennies plus tard, la forme finale du principe cosmologique. Comme nous le remarquerons dans les modèles cosmologiques modernes, aucune théorie n'est exempte de principes, pas même la relativité générale et donc, *a fortiori*, la mécanique newtonienne.

En appliquant la loi de gravitation à un élément de cet univers, ils trouvent bien évidemment que l'univers ne peut être statique, la force d'attraction provoquant un effondrement de celui-ci. Pour s'affranchir de ce phénomène, ils postulent qu'à la force de gravitation classique vient s'opposer une force répulsive<sup>1</sup> proportionnelle à la masse de l'élément d'univers et à la distance séparant le centre de l'univers de cet élément. Le facteur de proportionnalité équilibrant les deux forces étant justement ce qu'Einstein baptisera vingt années plus tard la *constante cosmologique*. Cette constante ayant la dimension de l'inverse d'un temps au carré, l'équation de mouvement d'un élément de fluide s'écrit :

$$\frac{\ddot{r}}{r} = - \left( \frac{4\pi G\rho}{3} \right) + \lambda = 0 \quad (2.1)$$

Cette constante cosmologique dépend donc de la densité de l'univers, et son expression est la suivante :

$$\lambda = \left( \frac{4\pi G}{3} \right) \rho \quad (2.2)$$

En conclusion, il existe une solution statique d'univers en mécanique newtonienne à la condition qu'une force de gravitation répulsive vienne s'opposer à la force de gravitation classique. Ainsi, pour un univers de densité de l'ordre de 10<sup>-27</sup> kilogramme par mètre-cube, la constante cosmologique, homogène à l'inverse d'un temps au carré, avoisine 10<sup>-36</sup>.

---

<sup>1</sup>cf Annexes «Modèle de Seeliger & Neumann»

## 2.2 Les débuts d'une Cosmologie Relativiste

### 2.2.1 Modèle cosmologique d'Einstein

A la fin du dix-neuvième siècle, deux théories semblaient pouvoir expliquer les phénomènes jusqu'alors observés, à l'exception toutefois de certains paradoxes tels que l'effet photoélectrique ou le mouvement par rapport au vent d'éther.

Durant l'année 1905, un ingénieur du bureau des brevets de Berne publia deux articles mettant en branle la physique du début de ce siècle. Un premier article introduisait le concept de quantum, le deuxième, «*Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*» jetait les bases de la relativité restreinte. Albert Einstein venait de réaliser une partie de ses rêves. Restait l'introduction de la gravitation dans cette théorie de la relativité encore balbutiante.

Pour établir la relation entre l'espace-temps et la matière, Albert Einstein se base sur le principe de Mach. Donner un véritable énoncé de ce principe n'est pas chose facile, aussi, le fond du principe de Mach repose-t-il sur le postulat que la géométrie de l'espace dépend de son contenu matériel. Il entreprend donc l'introduction de la gravitation dans sa théorie de la relativité, avec pour objectif ultime une écriture mathématique du principe de Mach. Il y parvient durant l'année 1915, et publie le résultat suivant :

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

Cette série d'équations tensorielles, appelées Equations d'Einstein<sup>2</sup>, est une illustration mathématique du principe de Mach. En effet, le terme de gauche représente le terme géométrique caractérisant la courbure locale de l'espace-temps et le terme représente le terme matériel, donnant les caractéristiques locales de l'état de la matière.

Une fois les tenseurs géométrique et matériel identifiés, il est alors possible de déterminer la courbure locale en chacun des points de l'espace-temps.

Einstein entreprend à son tour la recherche de l'équation de mouvement d'un élément de l'univers, dont la trajectoire est déterminée par la structure géométrique même de l'univers. Il suggère à ce propos un certain nombre d'hypothèses, en de nombreux points semblables aux hypothèses faites vingt ans plus tôt par Seeliger et Neumann. L'univers demeure à symétrie sphérique, de densité constante, toujours statique mais, il est, chose nouvelle, de dimension finie. En appliquant le tenseur qu'il pense être le tenseur géométrique adéquat, celui-ci possédant une propriété particulière du tenseur d'impulsion-énergie, il découvre que l'univers ne peut être statique, sans l'addition d'un terme complémentaire constant<sup>3</sup>. Ce terme, qu'Albert Einstein trouve proportionnel à la densité de l'univers, apparaît alors dans sa métrique, et le baptise «*constante cosmologique*».

<sup>2</sup>cf Annexes «*Equations d'Einstein*»

<sup>3</sup>cf Annexes «*Modèle cosmologique relativiste selon Einstein*»

Cette constante cosmologique est d'ailleurs fonction de la densité de matière de l'univers, comme le montre l'expression suivante :

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2} \rho \quad (2.4)$$

### Modèle cosmologique de De Sitter

Un autre physicien, Wilhem De Sitter, entreprend un travail complémentaire de celui d'Einstein. Il prend un jeu d'hypothèses là aussi, en de nombreux points, proche des hypothèses de Seeliger et Neumann, mais lui suppose un univers vide de matière. L'hypothèse de finitude de l'univers n'étant pas respectée dans son premier modèle d'univers, il se retrouve lui aussi contraint d'ajouter un terme<sup>4</sup> correctif dans les équations d'Einstein, et retrouve, dans sa métrique, ce terme apparu artificiellement chez Einstein, toutefois à un facteur multiplicatif près...

La grande différence entre les modèles cosmologiques de Einstein et De Sitter est la suivante : cette constante cosmologique, qui semble introduite pour les besoins de la cause, n'est pas contrainte par une densité de matière. Einstein avait entrepris cette étude avec pour objectif une extension du principe de Mach à tout l'univers, ainsi que la découverte de l'origine profonde de l'inertie. De Sitter lui montre que son modèle d'univers non seulement n'est pas meilleur que le sien, mais que l'origine que dernier semblait vouloir donner à l'inertie est inexacte... Cet épisode marque la fin de l'intérêt que portait Einstein à l'univers à grande échelle, par le biais de la théorie qui le fit connaître des foules, la relativité.

### 2.2.2 Un univers en expansion

C'est en 1922 qu'un mathématicien russe, Alexander Friedmann rapporte à Einstein un jeu de solutions non statiques de ses équations. A ce modèle, Einstein, tout en en reconnaissant la légitimité, n'accorde que très peu d'importance. L'histoire lui donnera tort quelques années plus tard ... aussi déclarera-t-il ultérieurement que *«ses équations étaient plus intelligentes que lui»*.

Au début du vingtième siècle, l'observatoire du Mont Wilson se dote du plus gros télescope en service du monde, d'un diamètre de deux mètres cinquante. Un astronome américain, Edwin Hubble, découvre sur ses plaques photographiques l'existence de millions de galaxies. En plus d'un classement morphologique de ces objets, il remarque qu'il existe une relation empirique reliant distance (mesurée en se basant sur les relations période-luminosité d'étoiles variables) et vitesse (mesurée par une méthode classique de Doppler-Fizeau) des galaxies lointaines. De ce fait, les galaxies, au delà d'une certaine distance, possède un décalage spectral systématique vers le rouge, caractérisant une vitesse

---

<sup>4</sup>cf Annexes *«Modèle cosmologique relativiste selon De Sitter»*

de récession entre notre Voie Lactée et les galaxies lointaines.

L'univers est donc peuplé d'un grand nombre de galaxies, mais, plus encore, les galaxies s'éloignent les unes des autres à une vitesse proportionnelle à leur distance. Ce mouvement de récession ne s'interprète plus en tant que mouvement propre de ces galaxies dans l'univers, mais comme un mouvement d'expansion de l'univers lui-même.

Cette solution non statique d'univers que Friedmann présentait à Einstein semble donc correspondre à la situation dynamique réelle de l'univers. La vision statique aristotélicienne de l'univers est balayée au profit d'un univers en évolution constante...

Dès lors, l'univers étant en évolution dynamique, la constante cosmologique, introduite par Einstein ou De Sitter pour obtenir un univers statique et fermé, devient obsolète. Il convient donc, dans l'écriture des équations d'Einstein sous forme tensorielle, de la supprimer. A ce propos, il est intéressant de citer la parole du maître de la relativité générale, qui, à la fin des années trente, voyant la floraison des observations de cet univers dynamique, déclara, à la manière d'une abjuration, «*L'introduction de la constante cosmologique est la plus grande gaffe de ma vie!*».

Alexander Friedmann avait donc posé la première pierre de la cosmologie relativiste moderne. D'autres s'efforceront de développer au mieux ses travaux. En particulier, Robertson et Walker publient au début des années trente la métrique la plus générale d'un univers homogène et isotrope, en expansion, à symétrie sphérique :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (2.5)$$

Dans l'expression de cette métrique, le terme est le facteur d'échelle, et traduit le mouvement d'expansion de l'univers. Le terme , lui, fixe la topologie de l'univers. Il est nul dans le cas d'un univers plat, négatif dans un univers ouvert en expansion infinie et positif dans le cas d'un univers fermé.

La cosmologie, durant le demi-siècle qui suivit, éluda ce terme de constante cosmologique, malgré son existence mathématiquement indiscutable dans les équations d'Einstein. Il convenait ainsi de citer le tenseur le plus général, ne dépendant que des dérivées première et seconde des termes de la métrique, à dérivée covariante nulle, puis de l'égaliser au tenseur d'impulsion-énergie. La constante cosmologique, présente, était tout simplement prise égale à zéro, sans autre justification...

A partir de la métrique de Robertson-Walker et des équations d'Einstein, si nous identifions le tenseur d'impulsion-énergie correspondant à ce fluide cosmique dans cet univers en expansion, nous pouvons connaître la loi de variation du facteur d'échelle . Ce tenseur d'impulsion-énergie que nous venons d'évoquer est diagonal, et ne dépend que des pression et densité du fluide cosmique. Ses composantes temporelle et spatiales sont alors

les suivantes :

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho c^2, P \frac{R^2}{1 - kr^2}, PR^2 r^2, PR^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (2.6)$$

A ce stade, il devient important de préciser ce que nous entendons par fluide cosmique. En effet, d'après le principe cosmologique, qui constitue une extension du principe de Copernic, un observateur ne possède aucune position privilégiée dans l'univers. Ainsi, pour tout observateur, l'univers prendra, à grande échelle, le même aspect. Cette isotropie de l'univers permet donc de supposer que le gaz cosmique constitue un fluide parfait, sans viscosité, dont la densité et la pression sont, à l'échelle des superamas de galaxies, homogènes et isotropes.

Nous parvenons ainsi aux équations des cosmologies, baptisées équations de Friedmann, pour un univers homogène et isotrope en expansion, à constante cosmologique nulle :

$$\frac{8\pi G}{c^4} p = -\frac{k}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{2\ddot{R}}{c^2 R} \quad (2.7)$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 = \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} \quad (2.8)$$

Elles permettent ainsi, à partir d'une densité et d'une pression, de connaître l'évolution du facteur d'échelle en fonction du temps. Ces équations ont d'ailleurs constitué, pendant plus du demi-siècle, le cheval de trait de toute la cosmologie observationnelle...

### 2.2.3 Le renouveau de la constante cosmologique

Dans les deux paragraphes suivant, nous allons nous attacher à comprendre ce qui poussent, autant les physiciens des particules que les cosmologistes, à transformer cette constante cosmologique en véritable «*Phoenix de la physique*». Il semble donc que *l'éloge funèbre* d'Einstein n'ait été qu'une étape de l'histoire de ce si controversé terme de la physique.

#### La constante cosmologique sous le regard du cosmologiste

Commençons par analyser les outils dont nous disposons. Nous prendrons comme équation tensorielle d'Einstein, écriture mathématique du principe de Mach, celle égalant le tenseur d'Elie Cartan avec le tenseur d'impulsion-énergie :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

De plus, nous prenons comme métrique celle de Robertson-Walker, dont nous rappelons l'expression :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (2.10)$$

A cette métrique en expansion s'ajoute bien évidemment le tenseur d'impulsion-énergie correspondant :

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho c^2, P \frac{R^2}{1 - kr^2}, PR^2 r^2, PR^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (2.11)$$

Une fois ces trois expressions définies, nous parvenons aux expressions suivantes, les équations des cosmologies pour un univers à constante cosmologique non nulle :

$$\frac{8\pi G}{c^4} p = -\frac{k}{R^2} - \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{2\ddot{R}}{c^2 R} + \Lambda \quad (2.12)$$

$$\frac{8\pi G}{3c^4} \rho c^2 = \frac{k}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3} \quad (2.13)$$

Ces équations sont la base de toute étude cosmologique, puisqu'elles permettent d'estimer simultanément l'influence de la densité, de la pression du fluide cosmique ou d'une constante cosmologique  $\Lambda$  sur le facteur d'échelle  $R(t)$ .

Aussi, dans le reste de notre étude, nous supposons que la pression du fluide cosmique est nulle. En effet, la pression thermodynamique d'un gaz est d'autant plus grande que les collisions entre les entités constituant ce gaz sont fréquentes. A l'échelle des superamas de galaxies, puisque c'est à cette échelle que l'on peut assimiler l'univers comme étant homogène et isotrope, les collisions entre les galaxies de deux amas sont extraordinairement rare. La pression d'un fluide cosmique sera donc négligeable. La nullité de la pression du fluide cosmique demeure donc une très bonne approximation.

Nous pouvons également introduire la constante de Hubble  $H(t)$  telle que :

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (2.14)$$

L'équation des cosmologies mettant en jeu la densité peut alors se réécrire :

$$1 + \frac{kc^2}{R^2 H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad (2.15)$$

Si nous nous plaçons à l'instant présent :  $H(t_0) = H_0$ , nous avons :

$$1 + \frac{kc^2}{R^2 H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad (2.16)$$

En utilisant les notations réduites suivantes, à  $t = t_0$  :

$$\Omega_0 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 \quad (2.17)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad (2.18)$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (2.19)$$

L'équation des cosmologies mettant en jeu la densité se réécrit de la matière compacte suivante :

$$\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k \quad (2.20)$$

Nous pouvons remarquer que le terme  $\Omega_0$  permet d'estimer, dans le cas d'un univers à courbure et constante cosmologique nulles, la densité de matière telle qu'au delà de cette limite l'univers se recontracte. Cette densité, la densité critique, possède ainsi pour expression :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.21)$$

Nous pouvons associer, comme dans l'équation 2.18, une relation liant la constante cosmologique  $\Lambda$  à une densité  $\rho_{vide}$ , telle que :

$$\rho_{vide} = \frac{\Lambda}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_\Lambda \quad (2.22)$$

Si nous nous plaçons dans un univers euclidien, donc de courbure nulle avec  $k = 0$ , nous pouvons estimer la densité du vide  $\rho_{vide}$  à partir de la densité de matière  $\rho$ . Ainsi, nous avons :

$$\rho_{vide} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left( 1 - \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 \right) = \rho_c - \rho_0 \quad (2.23)$$

Si la densité du vide est de l'ordre de la densité critique, nous avons, en prenant la constante de Hubble  $H_0$  égale à  $50 \text{ km/s/Mpc}$  ou  $1.62 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$  dans le système international :

$$\rho_{vide} \approx 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \approx 10^{-30} \text{ g/cm}^3 \quad (2.24)$$

Si nous exprimons cette densité en unités moins orthodoxes - celles de physiciens des particules - c'est à dire en  $\text{GeV}^4 h^{-3}$ , nous obtenons :

$$\rho_{vide} \approx 10^{-48} \text{ GeV}^4 h^{-3} \quad (2.25)$$

## 2.3 La constante cosmologique sous le regard du physicien

Les développements de la mécanique quantique, des premiers balbutiements de la théorie des quantas de Planck à l'élégance de l'électrodynamique quantique de Feynman, ont inauguré une batterie de concepts ou d'axiomes troublants. Ainsi, la mécanique quantique, comme la relativité restreinte, se place-t-elle, pour un néophyte, à l'encontre de toute intuition physique actuelle.

Par exemple, le principe d'incertitude de Heisenberg interdit l'existence d'une particule dans un état d'énergie potentielle et d'énergie cinétique nulles. Le niveau fondamental de l'énergie d'une particule plongée dans un potentiel n'est donc, en aucun cas, nul. Ce phénomène se retrouve par exemple dans le modèle de l'oscillateur harmonique quantique

à une dimension où l'énergie de l'état fondamental, pour une pulsation  $\omega$ , est  $E_0 = \frac{\hbar}{4\pi}\omega$ .

L'état fondamental, qui intuitivement se rapproche du vide au niveau énergétique, possède donc une énergie non nulle. Il ne reste qu'un pas à franchir pour maintenant poser l'hypothèse que le vide, enclin à des fluctuations quantiques, possède effectivement une énergie.

De l'expression réduite des équations des cosmologies  $\Omega_0 + \Omega_{Lambda} = 1 - \Omega_k$ , Turner et al (1993) n'hésitent pas à interpréter le terme de gauche, possédant un terme matériel  $\Omega_0$  et un terme issu de la constante cosmologique  $\Omega_\Lambda$ , en une extension du principe d'incertitude de Heisenberg. En effet, toujours selon ce principe, des paires de particules-antiparticules doivent spontanément apparaître et disparaître. Le physicien des particules estime ainsi que le terme n'est qu'un *concomitant*  $\Omega_{Lambda}$  du terme matériel  $\Omega_0$ .

De plus, il est admirable de voir qu'en 1948, le physicien Casimir démontra que les fluctuations quantiques entre deux plaques métalliques séparées d'une distance  $d$  sont à l'origine d'une force par unité de surface égale à  $hc\pi/480d^4$ . Cette force fut effectivement mesurée par Sparnaay (1957).

La théorie quantique des champs permet d'assimiler un champ relativiste à un ensemble d'oscillateurs harmoniques de toutes les fréquences possibles. Si nous considérons une particule sans spin de masse  $m$  à laquelle est associé un champ scalaire  $\phi$  (champ scalaire parce qu'il s'agit d'une particule sans spin), nous pouvons calculer la densité d'énergie correspondant à l'énergie du vide de cette particule dans tout l'univers. Il est alors facile de montrer que<sup>5</sup> :

$$\rho_{vide} = \frac{\pi E^4}{2h^3} \quad (2.26)$$

Si nous prenons comme énergie  $E$  l'énergie de Planck, égale à  $10^{19} \text{ GeV}$ , nous avons la densité du vide suivante :

$$\rho_{vide} \approx 10^{74} \text{ GeV}^4 h^{-3} \quad (2.27)$$

Ou encore, dans des unités plus courantes :

$$\rho_{vide} \approx 10^{95} \text{ kg/m}^3 \approx 10^{92} \text{ g/cm}^3 \quad (2.28)$$

Nous avons, dans le cadre de *la constante cosmologique sous le regard du cosmologiste*, calculé une densité d'énergie du vide dans un univers dominé par cette énergie. Il est fort intéressant de remarquer que si nous comparons chacune des densités, nous sommes contraints de constater que le rapport entre les deux estimations, faites par des moyens légitimes dans chaque discipline, sont différentes d'un facteur  $10^{122}$  !

Ce paradoxe constitue ce que, autant les physiciens des particules que les cosmologues appellent : *le problème de la constante cosmologique*. Nous ne nous développerons pas ici

<sup>5</sup>cf Annexes «Un calcul de l'énergie du vide

les explications suggérées par les deux disciplines visant à comprendre cette anomalie, probablement la plus importante de la physique actuelle...

Toutefois, il convient de préciser que la densité du vide ne peut, en aucun cas se résoudre à un unique champ scalaire associé à une particule de spin nul. Il existe en effet un très grand nombre de particules élémentaires, dont la contribution dépend bien évidemment de leurs interactions. D'ailleurs, en utilisant un très grand nombre de champs scalaires, il est possible que nous aboutissions à une énergie du vide ... nulle.

De plus, ajoutons que, pour le cosmologiste, la densité du vide s'introduit comme une constante à grand échelle, alors qu'aux petites échelles, il ne s'agit que d'un écart-type sur fluctuations quantiques locales.

Pour clore ce chapitre, rappelons ces paroles de Fulling, évoquant l'effet Casimir, en 1989 en ces termes :

Aucun chercheur, dans le champ recouvrant la mécanique quantique et la relativité générale ne peut manquer de montrer du doigt ce fait sur un ton de crainte et de vénération...

# Chapitre 3

## Influence d'une constante cosmologique

On ne peut comprendre un processus en l'interrompant, la compréhension doit rejoindre le cheminement du processus et cheminer avec lui.

Franck Herbert, *Dune*

Nous allons découvrir, dans ce chapitre, l'influence d'une constante cosmologique non nulle sur divers éléments de la cosmologie. Ce chapitre présente les effets de cette constante sur les paramètres suivants :

- la dynamique d'expansion
- l'âge de l'univers
- la mesure de distances
- la densité comobile d'objets

### 3.1 Influence sur la dynamique d'expansion

Dans le précédent chapitre, nous avons pu constater que l'équation des cosmologies était fonction de cette constante cosmologique mathématiquement incontournable dans les équations d'Einstein.

Nous plaçons à l'instant présent, nous avons transformé l'équation des cosmologies 2.13 en l'équation réduite :

$$\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k \quad (3.1)$$

avec  $\Omega_0 = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0$ ,  $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$  et  $\Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}$ .

En introduisant le décalage spectral  $z$ , nous pouvons établir une nouvelle équation des cosmologies, à un instant quelconque.

Comme nous avons conservation de l'énergie, dans un univers composé d'un fluide cosmique parfait dominé par la matière, se traduisant par un invariant, si nous introduisons  $z$  tel que  $1 + z = R_0/R(t)$ , nous obtenons :

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2} \quad (3.2)$$

Par les changements de variable  $a = 1/(1+z)$  puis  $t = \tau/H_0$ , nous retrouvons une nouvelle expression <sup>1</sup> de l'équation des cosmologies :

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right) = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\Omega_0 + (a^2 - 1)\Omega_\Lambda + 1 \quad (3.3)$$

Nous pouvons, à l'aide de cette expression, calculer le paramètre de décélération de l'univers connaissant les densités de matière et du vide. Par une démarche analogue <sup>2</sup>, nous trouvons que :

$$q(t) = \frac{\Omega_0 - 2a^3\Omega_\Lambda}{2(1-a)\Omega_0 + 2a(a^2-1)\Omega_\Lambda + 2a} \quad (3.4)$$

En nous plaçant à l'instant présent, c'est à dire lorsque  $R(t) = R_0$ , ou  $a = 1$ , nous obtenons :

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0 - \Omega_\Lambda \quad (3.5)$$

Une fois ces expressions établies, donnons quelques remarques sur l'influence d'une constante cosmologique non nulle sur la dynamique d'expansion.

Si nous prenons une constante cosmologique positive, l'expansion de l'univers sera exponentielle et tendra asymptotiquement vers le modèle d'univers de De Sitter. Ce processus d'expansion exponentielle ne peut être abandonné que si la densité de matière est

<sup>1</sup>cf Annexes «Equation des cosmologies : une nouvelle écriture»

<sup>2</sup>cf Annexes «Paramètre de décélération»

assez importante avant que le terme  $a^2$  en dans l'équation des cosmologies ne devienne prépondérant, à un instant donné.

A contrario, une constante cosmologique négative entraîne un effondrement, ceci même dans le cas d'un univers ouvert. Dans ce cas, l'effet de la constante cosmologique est identique à la gravitation classique.

Afin d'illustrer ce que nous venons de dire, traçons (3.1), dans le cas d'un univers de densité totale critique ( $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$ ), donc de courbure nulle, l'évolution du facteur d'expansion  $a(\tau)$ ,  $\tau$  étant défini comme le produit d'un temps avec la constante de Hubble. Nous considérons donc les cas suivants :

- $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$  : univers dominé par la densité de matière
- $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (0.1, 0.9)$  : univers dominé par la densité du vide

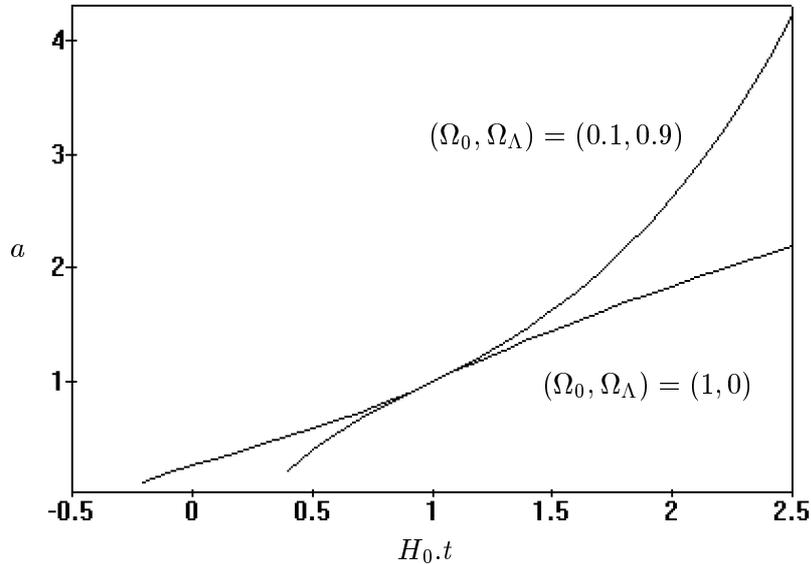


FIG. 3.1 – **Evolution du facteur d'expansion** : pour un univers de courbure nulle, dans le cas de distributions de densités différentes, en fonction du temps

## 3.2 Influence sur l'âge de l'univers

Recherchons maintenant combien de temps sépare deux événements de décalages spectraux  $z_1$  et  $z_2$ . Nous parvenons à l'expression<sup>3</sup> suivante :

<sup>3</sup>cf Annexes «*Temps séparant deux événements*»

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{H_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_\Lambda (1+z)^3 + (1-\Omega_0 - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (3.6)$$

Si nous calculons le temps séparant l'instant présent, correspondant à un décalage spectral nul à l'âge de l'univers, correspondant à un décalage spectral infini, notre intégrale devient :

$$t_{univers} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda (1+z)^3 + (1-\Omega_0 - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (3.7)$$

Cette intégrale possède, dans quelques cas très particuliers, une solution analytique, notamment dans le cas d'un univers à courbure et à constante cosmologique nulles.

De plus, pour tous les cas à constante cosmologique non nulle, nous serons contraints d'intégrer numériquement cette expression de l'âge de l'univers.

La figure suivante montre la variation de l'âge de l'univers en fonction de la densité du vide  $\Omega_0$ , pour les deux estimations actuelles de la constante de Hubble  $H_0$ , c'est à dire  $50 \text{ km/s/Mpc}$  et  $100 \text{ km/s/Mpc}$ , dans un univers de courbure nulle :  $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$

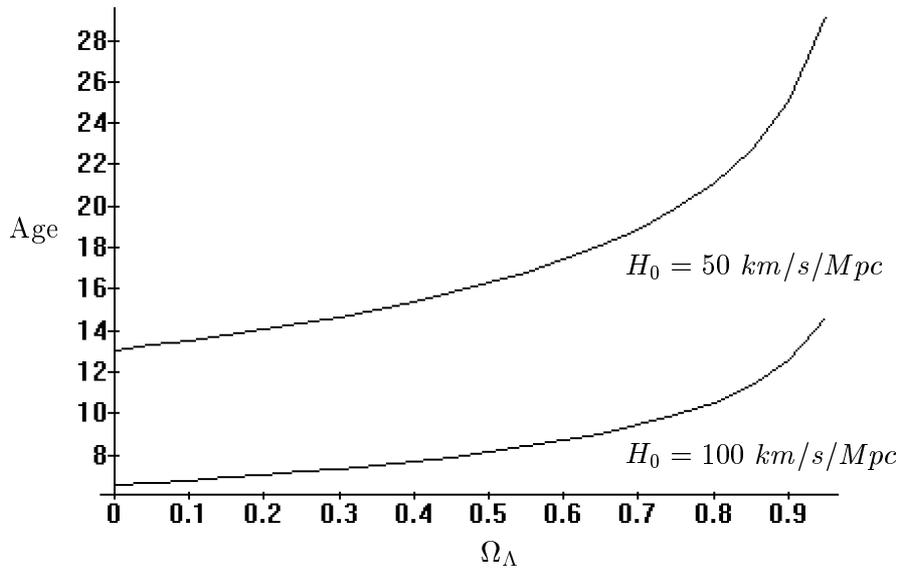


FIG. 3.2 – **Age de l'univers (en milliards d'années)** : pour deux estimations de la constante de Hubble, dans un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

La constante cosmologique influence donc de manière non négligeable l'âge de l'univers. Ainsi, rien n'empêche un univers de constante cosmologique nulle avec une constante de

Hubble faible de posséder le même âge qu'un autre univers à constante cosmologique prépondérante, la constante de Hubble étant double.

### 3.3 Influence sur la mesure de distances

Nous abordons, avec ce paragraphe, un élément très important de notre exposé. En effet, l'équation des cosmologies, jointe à la métrique de Robertson-Walker, permet, dans le cas d'un univers en expansion, d'estimer la distance *lumineuse* séparant deux objets de décalages spectraux différents.

La mesure des décalages spectraux constitue donc une mesure, non seulement du temps nous séparant de cet instant d'émission dont nous recevons le rayonnement mais également une estimation de la distance nous séparant de cet objet.

Aussi, si nous recherchons l'expression de coordonnée radiale séparant deux objets de décalages spectraux  $z_i$  et  $z_j$ , nous parvenons au résultat<sup>4</sup> suivant :

$$r_{ij} = S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_i}^{z_j} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (3.8)$$

Avec  $S_k(\chi)$  étant défini par :

– Pour  $k > 0$  :

$$S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}\chi)} \quad (3.9)$$

– Pour  $k = 0$  :

$$S_k(\chi) = \chi \quad (3.10)$$

– Pour  $k < 0$  :

$$S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}\chi)} \quad (3.11)$$

Cette *coordonnée comobile* ne constitue pas une mesure de la distance en tant que telle. Aussi, il est possible de définir trois types de distances, à partir de cette coordonnée comobile que nous venons de définir : la *distance de mouvement propre*<sup>5</sup>, la *distance de diamètre angulaire*<sup>6</sup> et la *distance-luminosité*<sup>7</sup>.

$$\begin{aligned} \text{Distance de mouvement propre} & : D_{ij}^M = R_0 r_{ij} \\ \text{Distance de diamètre angulaire} & : D_{ij}^A = (1+z_j)^{-1} R_0 r_{ij} \\ \text{Distance – luminosité} & : D_{ij}^L = (1+z_j) R_0 r_{ij} \end{aligned} \quad (3.12)$$

<sup>4</sup>cf Annexes «Premiers pas vers une mesure de distances»

<sup>5</sup>cf Annexes «Distance de mouvement propre»

<sup>6</sup>cf Annexes «Distance de diamètre angulaire»

<sup>7</sup>cf Annexes «Distance-luminosité»

L'influence d'une constante cosmologique non nulle dans l'estimation de distances, quelles qu'elles soient, est loin d'être négligeable, et ce surtout pour des objets à des décalages spectraux élevés. Pour illustrer ce que nous venons de dire, tâchons de représenter les distances nous séparant de quatre sources situées à des décalages spectraux allant de 0.5 à 4, dans le cas d'un univers toujours à courbure nulle ( $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$ ), pour diverses valeurs de densité du vide  $\Omega_\Lambda$ . Sur chacune des courbes suivantes, les distances sont données en unités  $c/H_0$ , qui correspond à une distance de 6 *Gpc* pour la constante de Hubble  $H_0$  égale à 50 *km/s/Mpc*.

La figure 3.3 représente les distances de mouvement propre pour  $\Omega_\Lambda \in [0, 1]$ , dans un univers plat.

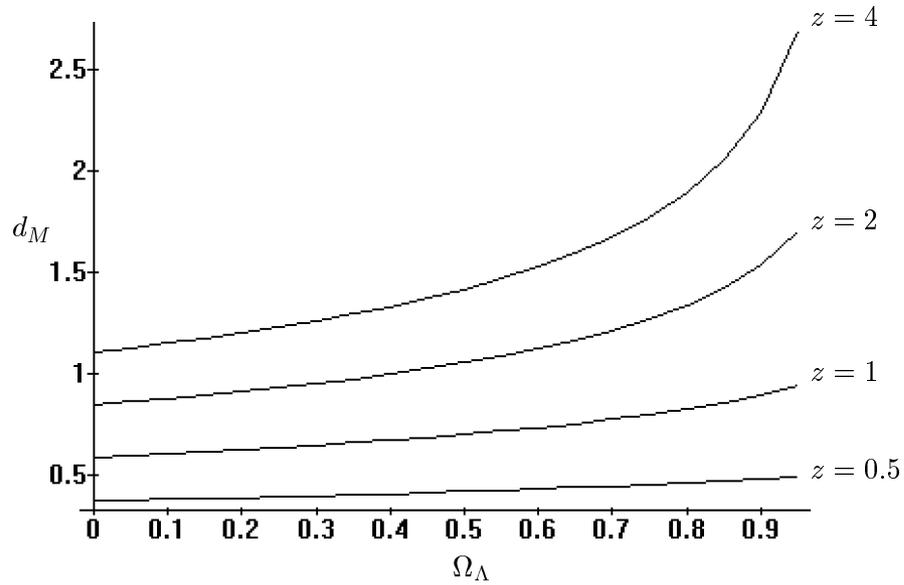


FIG. 3.3 – **Distance de mouvement propre** : pour quatre objets, pour un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

La figure 3.4 représente les distances de diamètre angulaire pour  $\Omega_\Lambda \in [0, 1]$ , dans un univers plat.

La figure 3.5 représente les distances-luminosité pour  $\Omega_\Lambda \in [0, 1]$ , dans un univers plat.

Cette dépendance sensible de la constante cosmologique à la distance nous sera très utile lorsque des distances apparaîtront en optique gravitationnelle.

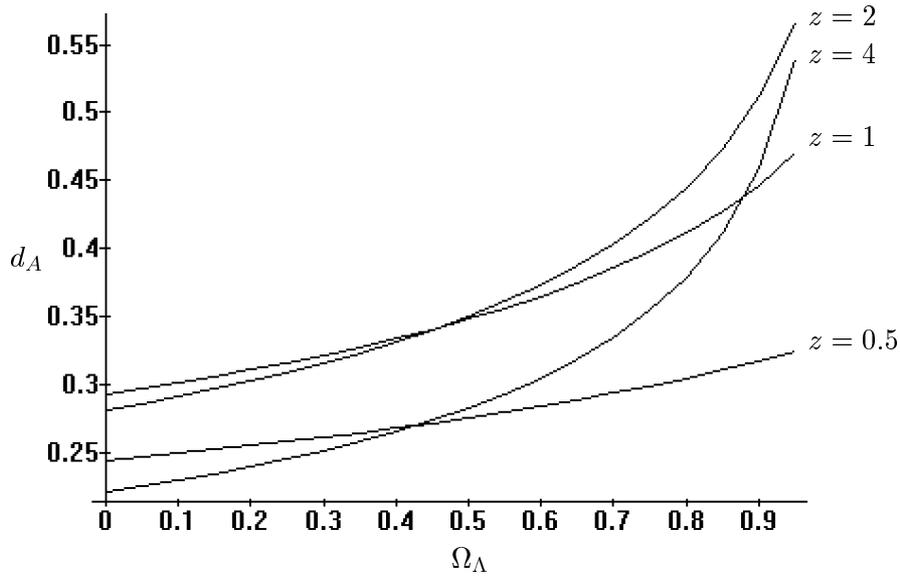


FIG. 3.4 – **Distance de diamètre angulaire** : pour quatre objets, dans un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

### 3.4 Influence sur la densité comobile d'objets

Regardons l'univers profond autour d'une ligne de visée quelconque. Il nous est alors possible d'estimer, par un simple comptage autour d'un décalage spectral, le nombre d'objets (galaxies ou quasars), se trouvant dans un certain angle solide. Cette mesure fournit ainsi une estimation de la densité projetée d'objets sur la ligne de visée, à deux dimensions. De plus, le comptage dans un intervalle de décalage spectral donné fournit la troisième dimension, la densité que nous calculons constitue ainsi une véritable densité d'objets, ou encore un nombre d'objets par élément de covolume.

Pour calculer cette densité théorique, la première étape consiste à rechercher l'expression du volume comobile  $\delta V$  pour un angle solide  $\delta\Omega$  et une coordonnée comobile  $\delta r$  donnés. Nous avons ainsi :

$$\delta V = \left( R_0 \frac{\delta r}{\sqrt{1 - kr^2}} \right) (R_0^2 r^2 \delta\Omega) = R_0^3 = \frac{r^2}{\sqrt{1 - kr^2}} \delta r \delta\Omega \quad (3.13)$$

Si nous remplaçons  $k$  par  $\Omega_k$ , sachant que  $\Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}$  :

$$\delta V = R_0^3 \left( 1 + \frac{R_0^2 H_0^2 \Omega_k}{c^2} \right)^{-1/2} \delta r \delta\Omega \quad (3.14)$$

Par la dépendance de cette expression en  $\Omega_k$  et en  $r$ , nous sentons bien que le volume comobile sera très sensible à la densité totale de l'univers.

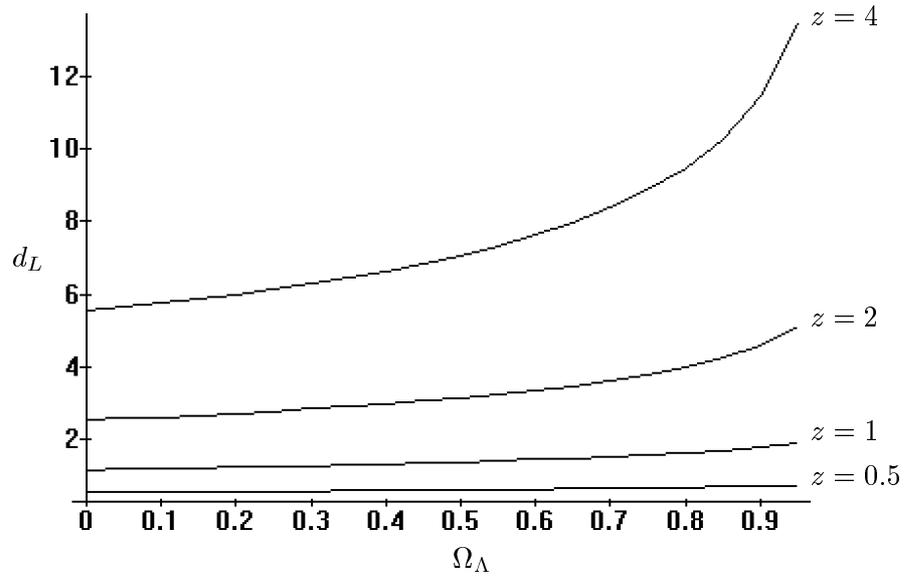


FIG. 3.5 – **Distance-luminosité** : pour quatre objets, dans un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

A l'aide de 3.8, nous pouvons établir la relation liant une source de décalage spectral à sa coordonnée comobile  $r$  :

$$r = S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (3.15)$$

Afin de permettre une simplification des calculs suivants, nous choisissons la solution économique d'un univers de densité totale égale à la densité critique, donc de courbure nulle ( $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$ ) de manière à calculer l'élément  $\delta r$ . Aussi, nous obtenons :

$$\delta r = \frac{c}{H_0 R_0} \frac{\delta z}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (3.16)$$

Si nous définissons  $f(z)$  telle que :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (3.17)$$

Notre covolume  $\delta V$  a pour expression :

$$\delta V = \frac{c^3}{H_0^3} \left( \int_0^z f(z) dz \right)^2 f(z) \delta z \delta \Omega \quad (3.18)$$

Illustrons donc graphiquement sur la figure 3.6 la variation de l'élément  $\frac{\delta V}{\delta z \delta \Omega}$  pour les deux univers suivants de courbure nulle, en unités  $\frac{c^3}{H_0^3}$ , en fonction d'un décalage spectral allant de 0.1 à 1000 :

- $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$  : univers dominé par la densité de matière
- $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (0.1, 0.9)$  : univers dominé par la densité du vide

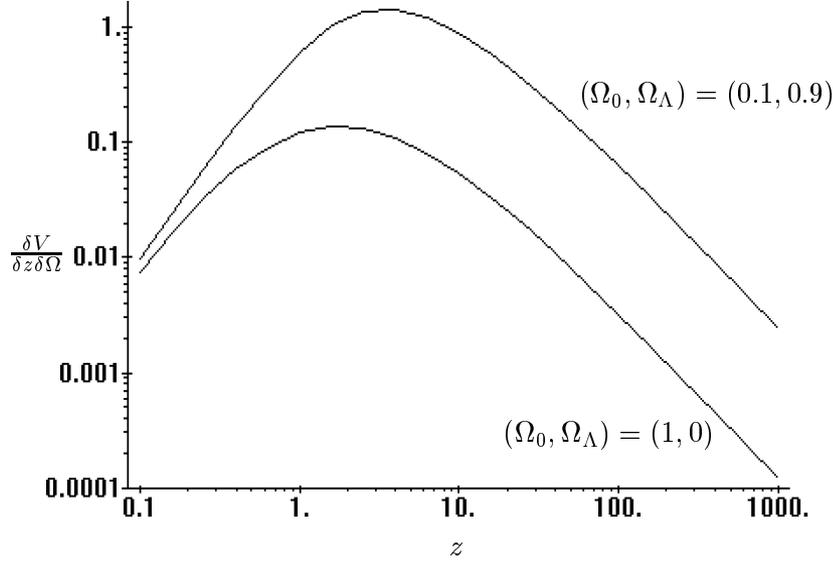


FIG. 3.6 – **Variation du covolume** : pour un univers de courbure nulle, dans le cas de distributions de densités différentes, en fonction du décalage spectral

Nous pouvons constater que, dans le cas d'un univers de courbure nulle à densité du vide dominante, la variation du covolume en fonction du décalage spectral est plus de dix fois supérieure à celle d'un univers dominé par la matière, lorsque le décalage spectral devient très significatif.

Ainsi, à la période de la recombinaison, autour de  $z = 1000$ , la différence dépasse l'ordre de grandeur. S'il nous était possible d'observer des objets à de tels décalages spectraux, si l'univers est de courbure nulle, la densité d'objets serait dix fois plus faible dans le cas d'une densité du vide dominante, le covolume étant plus important.



## Chapitre 4

# L'optique gravitationnelle

...On veut toujours que l'imagination soit la faculté de former des images. Or elle est plutôt la faculté de déformer les images fournies par la perception, elle est surtout la faculté de nous libérer des images premières, de changer les images...

Bachelard, *L'Air et les songes*

## 4.1 Introduction

Derrière les spectaculaires images d'arcs ou de mirages multiples se cache un puissant formalisme, permettant la prédiction ou l'interprétation de phénomènes liés à ce milieu en perpétuelle évolution qu'est l'univers. L'utilisation d'une telle technique nécessite une importante base formelle que nous allons développer. Partant de considérations très générales, nous parviendrons finalement à des propriétés intéressantes que possèdent les lentilles gravitationnelles.

### 4.1.1 Une approche historique

Le phénomène de base de l'optique gravitationnelle repose sur la déviation des rayons lumineux au voisinage d'une masse. En 1704, fort de sa théorie quasi parfaite à l'époque, Isaac Newton suggère que la lumière, qu'il pense composée de corpuscules, est soumise à la gravitation. En 1798, Simon Laplace prédit même que des objets peuvent être si massifs que la lumière ne peut s'en échapper.

Le trajet de la lumière est donc sensible à la gravitation. Cette conclusion permet d'ailleurs, à l'aide de la théorie de Newton, le calcul de la déviation d'un rayon lumineux au voisinage d'une masse.

Ainsi, si nous supposons qu'un pinceau de lumière passe au voisinage d'une masse, à une distance  $d$  du centre de la masse, l'expression de l'angle de déviation  $\theta$  occasionné par la présence de la masse est la suivante :

$$\theta = \frac{2GM}{dc^2} \quad (4.1)$$

Notons par ailleurs qu'une expression similaire, lors l'étude de la diffusion de Rutherford, se retrouve quand une particule chargée est plongée dans le champ électrostatique d'une autre particule chargée.

Malgré la suggestion de Newton, et ce calcul effectué au début du dix-neuvième siècle, aucun observateur ne tentera de mesurer cet angle de déviation, notamment en prenant comme masse défléctrice la masse solaire.

Il fallut attendre le début du vingtième siècle pour que cette expérience soit réalisée, dans un autre contexte. L'enjeu en valait d'ailleurs la chandelle. Einstein, travaillant dans ce domaine encore vierge de la relativité, retrouva par le calcul, que la précession de périhélie de Mercure n'était qu'un effet relativiste, et non pas une perturbation due à une hypothétique planète. Ce test, validant sa théorie, ne parvint cependant pas à convaincre tous les sceptiques de la relativité. Il entreprit alors le calcul de l'angle de déviation occasionné par la présence d'une masse au voisinage de la trajectoire d'un rayon lumineux. Après quelques hésitations, il trouva un angle double de celui correspondant à

la prédiction newtonienne :

$$\theta = \frac{4GM}{dc^2} \quad (4.2)$$

Une expérience ayant pour but la mesure de cet angle de déviation fut réalisée lors d'une éclipse totale du Soleil, en 1919, par Eddington et son équipe. Le disque lunaire recouvrant le disque solaire permet, pendant un bref instant, de prendre une photographie du ciel étoilé autour du Soleil. Ce test, que la relativité générale franchit victorieuse, marqua le début d'une longue quête confirmant expérimentalement la validité de cette théorie.

Près de vingt années après le triomphe d'Einstein, un astrophysicien aux idées novatrices, Franck Zwicky, déclara *qu'il était du domaine du vraisemblable que ce phénomène de déviation des rayons lumineux au voisinage d'un potentiel se retrouve, non plus à des échelles stellaires, mais à des échelles galactiques ou extragalactiques. Nous ne parlons plus désormais en terme d'étoiles mais en terme de galaxies<sup>1</sup> ou d'amas de galaxies.*

### 4.1.2 Des résultats spectaculaires

Il fallut attendre plus de quarante années avant que la prospective de Zwicky ne se réalisât. En 1979 fut découvert, dans le domaine de l'optique, le premier cas d'objets multiples appartenant à une même source. Séparées de six secondes d'arc se trouvaient deux images de spectres identiques. La lumière de cette seule et unique source était déviée par le potentiel gravitationnel d'une galaxie se situant sur la même ligne de visée, cette déviation provoquait alors un doublement de l'image de la source. Cet objet exotique baptisé 0957+561 (Walsh et al., 1979) s'inscrit en tête d'une longue liste s'accroissant sans relâche depuis quinze années.

En 1986, sur une image, prise à l'aide des premiers dispositifs à transfert de charges (D.T.C. ou C.C.D.) semblait apparaître une forme assez mystérieuse, si mystérieuse que les astronomes concernés crurent d'abord à un artefact. Les observations se suivaient et montrèrent bientôt que cette forme, semblable à un arc, était bel et bien physiquement présente dans le ciel. Se posait alors le problème théorique de l'origine de cette source. Plusieurs hypothèses furent avancées, comme la présence d'échos de lumière, de coquilles ou de «*cooling flows*». Bientôt, le spectre de cet arc permit de montrer qu'il se situait beaucoup plus loin que l'amas. Il apparut alors impensable qu'un objet aussi étendu puisse exister à des décalages spectraux aussi importants. L'idée d'un *arc gravitationnel* apparut ainsi comme la plus élégante... Au terme d'une longue campagne de persuasion, Abell 370 (Soucaïl et al, 1987) devint le premier amas de galaxies possédant des systèmes d'arcs.

Au moment où sont écrites ces lignes, les cas de mirages gravitationnels se comptent par dizaines. La forme des arcs, leur orientation par rapport à l'amas ou leur étendue sont autant d'indices permettant une analyse de toutes les composantes engagées dans ce phénomène, qu'il s'agisse de la source, de la masse défectrice, ou de l'espace extragalactique entre source, masse défectrice et observateur.

## 4.2 Formalisme des lentilles gravitationnelles

### 4.2.1 Cadre de travail

Attachons-nous d'ores et déjà à décrire le banc d'optique sur lequel nous allons travailler. Ce banc d'optique se partage en quatre éléments :

- la source
- la lentille
- l'espace extragalactique
- l'observateur

Aussi pouvons-nous schématiser notre banc d'optique par la figure 4.1.

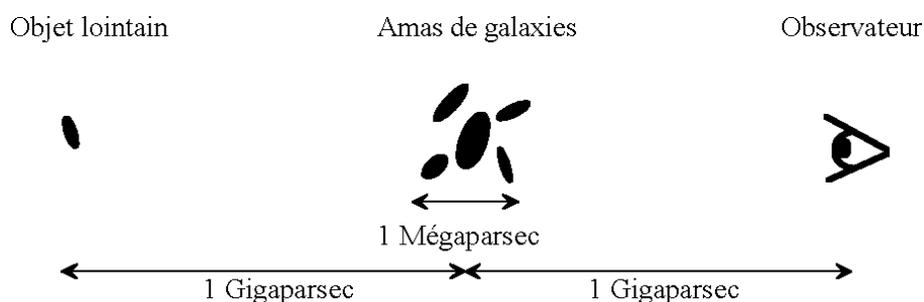


FIG. 4.1 – Illustration schématique d'un banc d'optique

Comme le schéma l'illustre, il existe trois ordres de grandeur entre les distances séparant les éléments du banc d'optique naturel et la dimension de l'amas de galaxies, jouant le rôle de la lentille. Cette différence très notable entre des dimensions permet de se placer dans *l'approximation des lentilles minces*. Cette approximation permet alors de supposer que le potentiel gravitationnel, incurvant la trajectoire d'un photon incident, peut être projeté sur un plan lentille, en supposant toutefois qu'une géométrie isotrope dans l'amas de galaxies est respectée.

De plus, pour que les rayons incidents puissent être déviés en direction de l'observateur, les angles de déviation seront de l'ordre de  $10^{-3}$  radians, ce qui correspond à quelques dizaines de secondes d'arc. Nous nous trouverons de plus dans *l'approximation des faibles déviations*.

### 4.2.2 Equation des lentilles

Prenons donc l'exemple d'une source S, dont les rayons sont déviés lorsqu'ils traversent le plan lentille. Cette déviation donne naissance à deux images virtuelles I1 et I2 (4.2).

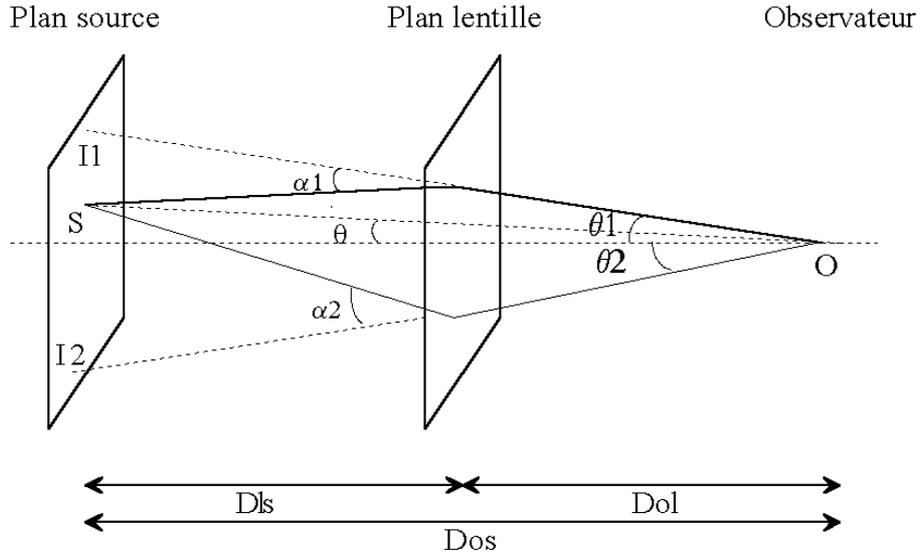


FIG. 4.2 – Déviation de rayons par une lentille et formation d’images multiples

Nous devons donc établir, connaissant les distances  $D_{OL}$ ,  $D_{OS}$  et  $D_{LS}$ , la relation entre les angles (4.3).

- de déviation  $\alpha$
- de direction de la source  $\theta_S$
- de direction de l’image  $\theta_I$

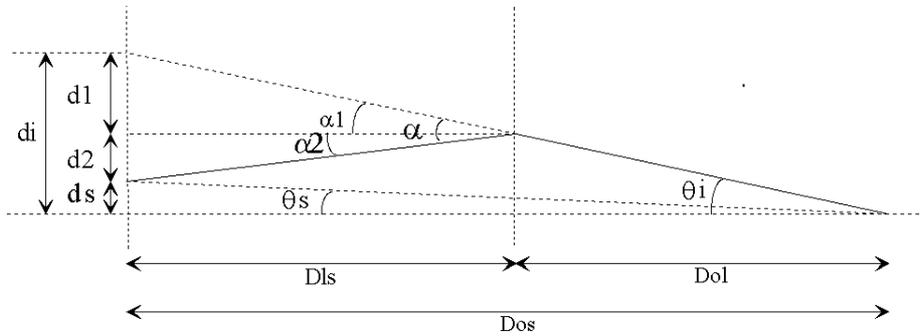


FIG. 4.3 – Illustration de l’équation des lentilles

Nous avons ainsi :  $d_I = d_S + d_1 + d_2$ . Comme nous pouvons nous placer dans l’approximation des faibles déviations, chacun des termes précédents s’exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_S &= d_{LS}/D_{OS} \Rightarrow d_S = D_{OS}\theta_S \\
 \tan \alpha_1 &= d_1/D_{LS} \Rightarrow d_1 = D_{LS}\alpha_1 \\
 \tan \alpha_2 &= d_2/D_{LS} \Rightarrow d_2 = D_{LS}\alpha_2 \\
 \tan \theta_I &= d_I/D_{OS} \Rightarrow d_I = D_{OS}\theta_I
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Nous en déduisons alors :

$$D_{OS}(\theta_I - \theta_S) = D_{LS}(\alpha_1 + \alpha_2) = D_{LS}\alpha \quad (4.4)$$

L'équation des lentilles se réduit donc à :

$$\theta_I = \theta_S + \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\alpha \quad (4.5)$$

Cette équation, à une dimension, peut se généraliser à deux dimensions par l'expression suivante :

$$\vec{\theta}_I = \vec{\theta}_S + \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\vec{\alpha} \quad (4.6)$$

Rappelons que, dans le paragraphe d'introduction, l'angle de déviation au voisinage d'une masse était proportionnel à la masse et inversement proportionnel à la distance séparant le pinceau de photons déviés et le centre de la masse. De même, l'angle de déviation  $\vec{\alpha}$  au voisinage de lentille sera fonction de la distribution de masse dans la lentille. Il est ainsi possible de définir un potentiel projeté  $\phi$ , proche du potentiel gravitationnel, lequel exprimera les propriétés de la lentille. Aussi, nous pouvons établir <sup>1</sup> une relation liant le potentiel projeté  $\phi$  à l'angle de déviation  $\vec{\alpha}$ . Cette relation est la suivante :

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}_I) = \frac{4}{c^2}D_{OL}\vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I}\phi(\vec{\theta}_I) \quad (4.7)$$

L'équation des lentilles se réécrit finalement de la manière suivante :

$$\vec{\theta}_I = \vec{\theta}_S + \frac{4}{c^2}\frac{D_{LS}D_{OL}}{D_{OS}}\vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I}\phi(\vec{\theta}_I) \quad (4.8)$$

Si nous posons :

$$\varphi(\vec{\theta}_I) = \frac{4}{c^2}\frac{D_{LS}D_{OL}}{D_{OS}}\vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I}\phi(\vec{\theta}_I) \quad (4.9)$$

Nous trouvons :

$$\vec{\theta}_I = \vec{\theta}_S + \vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I}\varphi(\vec{\theta}_I) \quad (4.10)$$

### 4.2.3 Opérations de transformation de la lentille

D'une manière tout à fait générale, la lentille gravitationnelle, comme toute autre lentille, opère une transformation d'un plan source vers un plan image. Aussi, à tout point du plan image, il existe un et un seul point source. La réciproque n'est pas vraie : en effet, dans le cas d'images multiples, une source peut donner naissance à plusieurs images, comme nous en avons donné une petite illustration sur la figure 4.3. La transformation du plan source au plan image n'est donc pas bijective, mais surjective.

---

<sup>1</sup>cf Annexes «Potentiel projeté & Angle de déviation»

Dans notre étude, plutôt que de considérer une transformation du plan source au plan image (ceci pourrait constituer une vision causale de l'événement), nous allons nous attacher à décrire la transformation permettant de passer du plan image au plan source. Ainsi, nous observons des images et nous cherchons, à partir du décalage spectral ou de la morphologie des images, à connaître la lentille, la source et la cosmologie associés à ces événements.

Cette transformation  $T$  du plan image au plan source établit donc la relation entre un point du plan image  $p_I = (x_I, y_I)$  et un point du plan source  $p_S = (x_S, y_S)$ . Nous avons ainsi :

$$p_S = T(p_I) \quad (4.11)$$

Si nous projetons les positions des points des plan-image et plan-source sur le ciel, nous pouvons établir la relation suivante entre l'équation des lentilles et la transformation précédente :

$$T(\vec{\xi}_I) = \vec{\xi}_S = \vec{\xi}_I - \vec{\nabla}_{\vec{\xi}_I} \varphi(\vec{\xi}_I) \quad (4.12)$$

Nous avons vu que la position angulaire dans le ciel nécessitait deux paramètres. En effet, si nous désirons écrire l'expression de la transformation, ceci ne pourra se faire de manière complète que si nous avons les expressions des transformations pour les deux équations. Si nous nous plaçons dans les deux cas suivants, nous obtenons :

– Pour une base cartésienne :  $\vec{\xi}_I = (x, y)$

$$\begin{aligned} T_x(x, y) &= x - \partial_x \varphi(x, y) \\ T_y(x, y) &= y - \partial_y \varphi(x, y) \end{aligned} \quad (4.13)$$

– Pour une base polaire :  $\vec{\xi}_I = (r, \theta)$

$$\begin{aligned} T_r(r, \theta) &= r - \partial_r \varphi(r, \theta) \\ T_\theta(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \partial_\theta \varphi(r, \theta) \end{aligned} \quad (4.14)$$

A partir des expressions des transformations, nous pouvons établir une matrice d'amplification  $a$ , laquelle nous fournira de précieuses informations sur les déformations occasionnées localement par notre déflecteur. Cette matrice d'amplification se construit à partir de la matrice jacobienne  $J$  :

$$a = J^{-1} \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{\xi}_I}{\partial \vec{\xi}_S} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Ecrivons, pour les deux cas suivants, l'expression de cette matrice jacobienne :

– Cas d'une base cartésienne :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x T_x & \partial_x T_y \\ \partial_y T_x & \partial_y T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \partial_x^2 \varphi & -\partial_{yx} \varphi \\ -\partial_{xy} \varphi & 1 - \partial_y^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

– Cas d'une base polaire :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_r T_r & \partial_r T_\theta \\ \frac{1}{r} (\partial_\theta (r T_r) - T_\theta) & \frac{1}{r} (\partial_\theta T_\theta + T_r) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \partial_r^2 \varphi & -\partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi \right) \\ -\partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi \right) & 1 - \frac{1}{r} \partial_r \varphi - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Nous pouvons, en calculant le déterminant de la matrice d'amplification, matrice inverse de la matrice jacobienne, définir un nouveau paramètre, *l'amplification*. L'amplification, notée  $A$ , peut aisément se calculer pour les deux cas suivants :

– Cas d'une base cartésienne :

$$A^{-1} = (1 - \partial_x^2 \varphi) (1 - \partial_y^2 \varphi) - (\partial_{xy} \varphi)^2 \quad (4.19)$$

– Cas d'une base polaire :

$$A^{-1} = (1 - \partial_r^2 \varphi) \left( 1 - \frac{1}{r} \partial_r \varphi - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \varphi \right) - \left( \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi \right) \right)^2 \quad (4.20)$$

A cela, nous pouvons ajouter qu'il existe des points du plan image où le Jacobien, l'inverse de l'amplification, s'annule. En ces points, nous aurons donc une amplification infinie. Il est ainsi possible de connaître les *lignes critiques*, lieux des points du plan-image où l'amplification devient infinie, ainsi que les *lignes caustiques*, lieux des points du plan-source correspondant à ces lignes critiques.

### 4.3 Application à différents types de potentiels

Nous avons vu, dans les précédents paragraphes, comment le potentiel associé à la lentille intervenait dans l'équation des lentilles ainsi que dans l'expression de la matrice d'amplification. Ainsi, la relation entre le potentiel projeté  $\phi$  et la position des images était donnée par l'équation des lentilles 4.8 :

$$\vec{\theta}_I = \vec{\theta}_S + \frac{4}{c^2} \frac{D_{LS} D_{OL}}{D_{OS}} \vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I} \phi(\vec{\theta}_I) \quad (4.21)$$

De plus, nous avons établi la relation liant ce potentiel projeté  $\phi$  à la densité surfacique  $\sigma$  de la lentille :

$$\phi(\vec{\theta}_I) = \frac{G}{D_{OL}^2} \int \int \Sigma(\vec{\psi}) \ln(|\vec{\psi} - \vec{\theta}_I|) d^2 \vec{\psi} \quad (4.22)$$

Ainsi, connaissant une densité surfacique quelconque de la lentille, nous sommes en mesure de définir le potentiel projeté, et donc de résoudre, à la fois l'équation des lentilles et les termes de la matrice d'amplification.

Il est possible de dégager quatre types de potentiels simples que nous utiliserons dans notre étude. Pour chacun d'eux, nous allons estimer le potentiel projeté, l'équation des lentilles et les termes de la matrice d'amplification. Les potentiels que nous allons donc étudier sont les suivants :

- un point-masse
- une sphère isotherme singulière
- une sphère isotherme avec rayon de coeur
- un ellipsoïde isotherme avec rayon de coeur

### 4.3.1 Cas d'un point-masse

Lorsque le déflecteur possède toute sa masse concentrée en un point la lentille, nous avons à faire au cas du point-masse. En effet, si nous désirons écrire la densité surfacique  $\sigma$  d'un déflecteur composé d'une masse  $M$  en un point de la lentille, nous avons :

$$\sigma(\vec{\theta}) = M\delta(\vec{\theta}) \quad (4.23)$$

Si nous remplaçons la densité surfacique par son expression, nous déduisons que :

$$\phi(\vec{\theta}_I) = \frac{GM}{D_{OL}^2} \int \int \delta(\vec{\psi}) \ln(|\vec{\psi} - \vec{\theta}_I|) d^2\vec{\psi} \quad (4.24)$$

Cette expression se réduit à :

$$\phi(\vec{\theta}_I) = \frac{GM}{D_{OL}^2} \ln|\vec{\theta}_I| \quad (4.25)$$

A partir de 4.9, nous déduisons que :

$$\varphi(\vec{\theta}_I) = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{\vec{\theta}_I}{|\vec{\theta}_I|^2} \quad (4.26)$$

A ce stade, nous avons tout ce qui est nécessaire pour identifier l'équation des lentilles ainsi que les termes de la matrice d'amplification.

L'équation des lentilles prend alors la forme :

$$\vec{\theta}_I = \vec{\theta}_S + \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{\vec{\theta}_I}{|\vec{\theta}_I|^2} \quad (4.27)$$

Comme nous avons une symétrie cylindrique dans ce problème, si nous posons :

$$R_E^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \quad (4.28)$$

En modifiant nos angles en rayons angulaires  $r$ , nous obtenons :

$$r_S = r_I \left( 1 - \frac{R_E^2}{r_I^2} \right) \quad (4.29)$$

De plus, nous estimons l'amplification provoquée par ce potentiel à l'aide de l'expression 4.20 :

$$A^{-1} = \left(1 + \frac{R_E^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{R_E^2}{r^2}\right) = 1 - \frac{R_E^4}{r^4} \quad (4.30)$$

Nous remarquons que, lorsque le rayon angulaire  $r$  est égal au rayon d'Einstein  $R_E$ , nous avons une amplification infinie.

Pour terminer ce bref paragraphe sur une lentille de point-masse, déterminons l'angle de déviation correspondant au potentiel projeté du point-masse.

L'expression 4.7 nous permet de déduire que :

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}_I) = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OS}}{D_{LS}D_{OL}} \frac{\vec{\theta}_I}{|\vec{\theta}_I|^2} \quad (4.31)$$

Avec  $\vec{d} = D_{OL}\vec{\theta}_I$ , le paramètre d'impact sur la lentille, nous retrouvons, comme nous le citons dans l'introduction :

$$\alpha = \frac{4GM}{dc^2} \quad (4.32)$$

### 4.3.2 Cas d'une sphère isotherme singulière

Le modèle de la sphère isotherme singulière fut introduit pour la première fois par Binney et Tremaine en 1987. Il s'agit d'ailleurs du modèle le plus rudimentaire pour décrire le potentiel projeté associé à un déflecteur.

Dans le paragraphe précédent, nous avons donné l'expression du potentiel projeté en fonction de la masse ponctuelle de l'objet déflecteur. Dans un cas plus réaliste, nous sommes contraints de définir certaines observables qui rendront compte du potentiel gravitationnel, puis du potentiel projeté associé à notre distribution de masse.

Dans cette optique, le paramètre le plus naturel nous permettant de mener à bien cette tâche demeure la dispersion de vitesse centrale  $\sigma$ .

Ainsi, il est possible de définir le potentiel projeté d'une lentille en sphère isotherme singulière :

$$\phi(\vec{\theta}_I) = \pi\sigma^2 D_{OL} |\vec{\theta}_I| \quad (4.33)$$

A partir de la relation 4.9, nous en déduisons que :

$$\varphi(\vec{\theta}_I) = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} |\vec{\theta}_I| \quad (4.34)$$

L'équation des lentilles prend alors la forme :

$$\vec{\theta}_S = \vec{\theta}_I - \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{\vec{\theta}_I}{|\vec{\theta}_I|} \quad (4.35)$$

Le premier constat que nous donnons à la suite de l'écriture de cette équation des lentilles concerne l'angle de déviation au voisinage de la lentille. Nous constatons en effet que l'angle ne dépend pas de la distance au centre du potentiel. L'angle de déviation demeure donc constant en tout point du plan-lentille.

Nous remarquons par ailleurs que nous avons une symétrie cylindrique à notre problème. En posant :

$$R_E = \frac{4\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \quad (4.36)$$

Ne considérant plus que des rayons angulaires  $r$ , nous obtenons :

$$r_S = r_I \left(1 - \frac{R_E}{r_I}\right) \quad (4.37)$$

De même, nous pouvons estimer l'amplification à l'aide de l'expression 4.20 :

$$A^{-1} = \left(1 - \partial_r^2 \varphi\right) = \left(1 - \frac{1}{r} \partial_r^2 \varphi\right) = 1 - \frac{R_E}{r_I} \quad (4.38)$$

Nous constatons, ici encore qu'il existe des points du plan image pour lesquels l'amplification deviendra infinie. L'axe du potentiel constitue le lieu de ces points du plan image, c'est-à-dire lorsque  $r_I = R_E$ .

### 4.3.3 Cas d'une sphère isotherme avec rayon de coeur

Nous pouvons également définir les paramètres d'une lentille pour un potentiel non singulier. En effet, si le potentiel du plan lentille est une sphère isotherme avec rayon de coeur, deux nouveaux éléments apparaissent : la disparition de la singularité à l'origine d'une part et l'existence, d'autre part, près de cette origine, d'un potentiel projeté plus ou moins piqué autour de l'axe de la lentille.

Aussi, le potentiel projeté d'une lentille en sphère isotherme avec rayon de coeur a pour expression la suivante :

$$\phi(\vec{\theta}_I) = \frac{3\pi\sigma^2}{2c^2} D_{OL} \sqrt{\theta_I^2 + r_0^2} \quad (4.39)$$

Le rayon de coeur  $r_0$  est ici exprimé en radians, et correspond au rayon angulaire pour lequel la densité projetée est égale à la moitié de la densité centrale, dans le plan de la lentille...

A partir de cette expression, nous déduisons instantanément l'expression de  $\varphi(\vec{\theta}_I)$  :

$$\varphi(\vec{\theta}_I) = \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \sqrt{\theta_I^2 + r_0^2} \quad (4.40)$$

L'équation des lentilles prend alors la forme suivante :

$$\vec{\theta}_S = \vec{\theta}_I - \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \frac{\vec{\theta}_I}{\sqrt{\theta_I^2 + r_0^2}} \quad (4.41)$$

De plus, ayant une symétrie cylindrique de notre problème, nous pouvons réécrire l'équation précédente en fonction d'un rayon angulaire  $r$  :

$$r_S = r_I - \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \frac{r_I}{\sqrt{r_I^2 + r_0^2}} \quad (4.42)$$

De même, nous avons comme expression de l'amplification :

$$A^{-1} = \left( 1 - \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \frac{r_0^2}{\left(\sqrt{r_I^2 + r_0^2}\right)^3} \right) \left( \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \frac{1}{\sqrt{r_I^2 + r_0^2}} \right) \quad (4.43)$$

Comme dans les cas précédents, il existe des points du plan image tels que l'amplification devient infinie.

#### 4.3.4 Cas d'un ellipsoïde isotherme avec rayon de coeur

Nous avons supposé, dans les trois types de potentiel que nous avons étudiés, qu'il existait une symétrie circulaire de cette source de potentiel gravitationnel dans le plan lentille. Malheureusement, la nature est loin de fournir de telles configurations. Aussi pouvons-nous facilement modéliser le potentiel gravitationnel d'un défecteur elliptique, une galaxie cD par exemple, tout en utilisant un nombre restreint de paramètres.

Ainsi, si cette lentille a pour dispersion de vitesse centrale  $\sigma$ , pour ellipticité  $\epsilon$ , pour rayon de coeur  $r_0$  et pour orientation  $\theta_0$ , à un point du plan image de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  correspond le potentiel suivant :

$$\phi(r, \theta) = \frac{3}{2}\pi\sigma^2 D_{OL} r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 (1 + \epsilon \cos [2(\theta - \theta_0)])} \quad (4.44)$$

A l'aide de cette expression, nous pouvons définir le potentiel :

$$\varphi(r, \theta) = \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 (1 + \epsilon \cos [2(\theta - \theta_0)])} \quad (4.45)$$

Afin de simplifier les notations, si nous posons :

$$\varphi_0 = \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} r_0 \quad (4.46)$$

$$f = 1 + \epsilon \cos [2(\theta - \theta_0)] \quad (4.47)$$

Nous transformons  $\varphi(r, \theta)$  en l'expression suivante :

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} f \quad (4.48)$$

Par une première dérivation suivant  $r$  et suivant  $\theta$  de l'expression 4.48, puis par une projection de la position de la source  $(r_S, \theta_S)$  suivant la direction de l'image  $(r_I, \theta_I)$ , nous déduisons les deux termes de l'équation des lentilles pour ce potentiel :

$$r_I - \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=r_I} = r_S \cos \theta_S \quad (4.49)$$

$$-\frac{1}{r_I} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)_{r=r_I, \theta=\theta_I} = r_S \sin \theta_S \quad (4.50)$$

De même, utilisant l'expression 4.20 puis 4.48, nous pouvons parvenir à l'expression de l'amplification suivante :

$$A^{-1} = \left(1 - \partial_r^2 \phi\right) \left(1 - \frac{1}{r} \partial_r \phi - \frac{1}{r^2} \partial^2 \theta \phi\right) - \left(\partial_\theta \left(\frac{1}{r} \partial_r \phi\right)\right)^2 \quad (4.51)$$

## 4.4 Propriétés des lentilles

### 4.4.1 Multiplicité des images

La principale propriété d'une lentille gravitationnelle réside dans sa capacité à pouvoir donner plusieurs images d'une même source. Cette propriété peut en fait se déduire de l'équation des lentilles. En effet, supposons que nous choisissons un potentiel en sphère isotherme avec rayon de coeur. Comme nous avons une symétrie cylindrique, l'équation des lentilles 4.8 s'écrit de la manière suivante :

$$r_S = r_I - \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2} \frac{D_{OS}}{D_{OS}} \frac{r_I}{\sqrt{r_I^2 + r_0^2}} \quad (4.52)$$

Développant cette expression, nous parvenons à un polynôme d'ordre 4 en  $r_I$  :

$$P(r_I) = ar_I^4 + br_I^3 + cr_I^2 + dr_I + e \quad (4.53)$$

Avec :

$$a = 1 \quad (4.54)$$

$$b = -2r_S \quad (4.55)$$

$$c = r_S^2 + r_0^2 - \left(\frac{12\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2} \frac{D_{OS}}{D_{OS}}\right)^2 \quad (4.56)$$

$$d = -2r_S r_0^2 \quad (4.57)$$

$$e = r_S^2 r_0^2 \quad (4.58)$$

Nous avons donc, pour une valeur quelconque de  $r_S$ , quatre racines de ce polynôme. Mais, parmi ces quatre racines de  $P(r_I)$ , parfaitement exactes mathématiquement, certaines demeurent doubles ou inacceptables physiquement.

Prenons le cas où la source se trouve dans l'axe du potentiel, nous avons  $r_S = 0$ .

Notre polynôme se réduit alors à l'expression suivante :

$$r_I^4 + \left[ r_0^2 - \left( \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \right) \right] r_I^2 = 0 \quad (4.59)$$

dont nous déduisons immédiatement les solutions :

$$r_I = \pm \sqrt{\left( \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \right)^2 - r_0^2} \quad (4.60)$$

Nous retrouvons alors les deux images diamétralement opposées par rapport à l'axe du potentiel, d'où la création d'un cercle d'Einstein.

Si nous nous plaçons par contre dans un cas parfaitement général, il existe, selon la situation de la source, soit une seule solution, soit trois solutions. De manière à extraire, parmi les quatre racines du polynôme, celles conduisant à une solution physique, il nous faut reprendre l'équation des lentilles.

Nous en déduisons ainsi qu'une solution  $r_I$  est viable si :

$$r_I \left( 1 - \frac{6\pi\sigma^2 D_{LS}}{c^2 D_{OS}} \frac{1}{\sqrt{r_I^2 + r_0^2}} \right) = r_S \quad (4.61)$$

De l'expression précédente, nous pouvons également affirmer qu'une solution ne sera pas valable si :

$$\text{sgn}(r_I) \neq \text{sgn}(r_I - r_S) \quad (4.62)$$

De manière à illustrer ce qui précède, nous allons prendre deux cas, dans lesquels, soit une solution, soit trois solutions sont possibles. Pour cela, prenons un univers de courbure nulle, entièrement dominé par la matière baryonique puis une lentille en sphère isotherme avec rayon de coeur. Les paramètres sont les suivants :

- Une densité de matière dominante  $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$
- Une dispersion de vitesse centrale  $\sigma = 1000 \text{ km/s/Mpc}$
- Un rayon de coeur  $r_0 = 5''$

Prenons le cas où la source se trouve telle que . Il existe quatre racines réelles du polynôme :

$$\begin{aligned} r_I &= -12.79'' && \text{Racine valable} \\ r_I &= -3.21'' && \text{Racine valable} \\ r_I &= 1.78'' && \text{Racine non valable} \\ r_I &= 34.18'' && \text{Racine valable} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Parmi les quatre racines ci-dessus, seules trois correspondent à la position d'une image, pour une position de la source écartée de  $10''$  de l'axe du potentiel.

Prenons le cas où la source se trouve telle que  $r_S = 20''$ . Il existe deux racines réelles du polynôme :

$$\begin{aligned} r_I &= 4.22'' && \text{Racine non valable} \\ r_I &= 44.29'' && \text{Racine valable} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Parmi les deux racines ci-dessus, seule une correspond à la position d'une image, pour une position de la source écartée de  $20''$  de l'axe du potentiel.

D'une manière générale, le nombre d'images d'une même source change lorsque celle-ci franchit sa ligne caustique, c'est-à-dire autour de la divergence de l'amplification d'une image. Dans le précédent paragraphe, nous avons écrit l'expression de l'amplification d'une image de rayon  $r_I$  :

$$A^{-1} = \left( 1 - \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{r_0^2}{(\sqrt{r_0^2 + r_I^2})^3} \right) \left( 1 - \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r_I^2}} \right) \quad (4.65)$$

Nous avons une amplification infinie lorsque :

$$1 = \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r_I^2}} \quad (4.66)$$

$$1 = \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + r_I^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.67)$$

Dans le premier cas, la source se trouve dans l'axe du potentiel. Nous avons vu qu'il y avait alors formation d'un cercle d'Einstein. Le premier rayon critique d'Einstein possède alors pour expression :

$$r_{IC_1} = r_0 \sqrt{\left( \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} r_0^{-1} \right)^2 - 1} \quad (4.68)$$

De plus, ce rayon critique correspond à un domaine caustique tel que :

$$r_{SC_1} = 0 \quad (4.69)$$

De même, à partir du second cas, nous déduisons le second rayon critique d'Einstein :

$$r_{IC_2} = r_0 \sqrt{\left( \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} r_0^{-1} \right)^{\frac{2}{3}} - 1} \quad (4.70)$$

Le domaine caustique correspondant est alors :

$$r_{SC_2} = r_0 \left[ \left( \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} r_0^{-1} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.71)$$

Calculons, à l'aide de l'expression précédente, l'expression du rayon caustique pour la configuration que nous avons supposée précédemment. Nous trouvons alors :

$$r_{SC} = 12.89'' \quad (4.72)$$

Ce résultat demeure cohérent avec les multiplicités que nous avons trouvées dans les deux cas précédemment traités. En effet, dans l'un des cas, la source se trouvait à l'intérieur du cercle défini par le rayon caustique, alors que dans l'autre cas, elle se trouvait à l'extérieur. Une application montrerait, par exemple, que si nous prenions deux sources situées à 12.8'' et 13'' de l'axe du potentiel, il y aurait changement de multiplicité d'images.

Ainsi, si nous avons une ou plusieurs images d'une même source, pouvons-nous, non estimer, mais tout de même contraindre les paramètres de cette lentille.

#### 4.4.2 Amplification des images

Nous avons vu que nous pouvions établir la matrice jacobienne de la transformation entre le plan-source et le plan-image, connaissant le potentiel projeté de la lentille. A l'aide de cette matrice jacobienne, nous avons défini la matrice d'amplification puis l'Amplification, le déterminant de cette dernière. Cette amplification dépend donc du potentiel projeté de la lentille, mais aussi du décalage spectral des sources. Plus encore, l'amplification permet de prendre conscience de la déformation de la source passant à travers le défecteur.

A ce stade, une propriété intéressante de la lentille peut être donnée. En fait, lorsqu'une source étendue est déformée par une lentille, la brillance de surface de cette source se conserve sur chaque image. Ainsi, nous avons amplification tout simplement parce que chaque image se trouve étalée sur une plus grande surface sur le ciel, et plus de photons nous proviennent de la source. Toutefois, lorsque la source demeure un quasar non résolu, nous ne pouvons plus parler de brillance de surface de la source puisque le quasar ne possède aucune surface apparente sur le ciel. Dans ce cas, l'image du quasar se trouve amplifiée en intensité, non en surface.

Ces propriétés d'amplification classe les images en deux catégories : les sous-amplifiées et les sur-amplifiées. Dans le premier cas, la valeur absolue de l'amplification est inférieure à l'unité. L'image paraît ainsi moins brillante que ne l'est la source en réalité. A contrario, une image sur-amplifiée, ayant une amplification supérieure à l'unité, paraîtra plus brillante que la source.

De plus, cette amplification constitue une observable. En effet, il devient possible d'estimer l'amplification relative de chacun des objets multiples, en mesurant l'intensité totale, qu'il s'agisse d'un quasar ou d'une galaxie étendue. Cette étude des amplifications relatives sur plusieurs images d'une même source permet d'établir dans une certaine mesure une contrainte sur les paramètres de la lentille, que sont la dispersion de vitesse et le rayon de coeur, par exemple.

### 4.4.3 Changement de parité

Nous avons évoqué, dans le paragraphe précédent, l'utilisation de l'amplification à des fins observationnelles. Cette amplification des images par rapport à la source, nous l'avons vu, par sa valeur absolue, renseignait sur la brillance intrinsèque de la source. Cette amplification, par son signe, nous rapporte un élément bien différent : elle permet, pour des sources résolues et dont les images sont étendues spatialement, de connaître l'orientation d'une image par rapport à la source. Ainsi, si l'amplification est positive, l'image se trouve dans la même orientation que la source. A contrario, si l'amplification demeure négative, l'image se trouvera inversée par rapport à la source. Nous obtiendrions une image identique à celle que nous aurions de cette source dans un miroir, le miroir étant toutefois, pour rendre compte des distorsions, de surface déformée.



# Chapitre 5

## Utilisation originale de l'optique gravitationnelle

La connaissance théorique est un trésor dont la pratique est la clé.

Fuller, *Gnomologia*

## 5.1 Optique gravitationnelle & constante cosmologique

Dès 1984, Turner et al. (1984) développèrent le premier formalisme permettant de calculer la distribution de séparations angulaires d'images multiples de quasars. En modélisant les lentilles par des sphères isothermes, ils ont pu évaluer le nombre d'événements à forte séparation angulaire observé et le comparer à celui prédit pour des modèles cosmologiques et . L'introduction d'une constante cosmologique remonte à 1989 (Gott et al. 1989), généralisant ainsi les travaux pionniers de Turner et al. (1984).

Le principe de ces analyses consiste à calculer une probabilité d'effet de lentille gravitationnelle en introduisant une profondeur optique. Nous pouvons alors décrire la fréquence et l'intensité de l'événement en fonction de la densité comobile de lentilles et de leur intensité individuelle. Si nous prenons par exemple les hypothèses suivantes :

- l'univers est de courbure nulle :  $k = 0 \iff \Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$
- la densité comobile de galaxies dans l'univers est constante et égale à  $n_0$ .
- les objets jouant le rôle de lentilles gravitationnelles forment un potentiel en sphères isothermes de dispersion de vitesse centrale  $\sigma$ .
- le quasar observé se trouve à un décalage spectral  $z_Q$ .

La profondeur optique  $P_{MG}(z_Q, n_0, \sigma, \Omega_0, \Omega_\Lambda)$  a pour expression :

$$P_{MG} = K \left( \int_0^{z_Q} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \right)^3 \quad (5.1)$$

avec :

$$K = \frac{16}{30} \pi^3 n_0 \left( \frac{c}{H_0} \right)^3 \left( \frac{\sigma}{c} \right)^4 \quad (5.2)$$

Turner et al., intégrant la fonction de luminosité de Schechter et utilisant les relations de Faber-Jackson et Tully-Fischer, calculèrent le coefficient  $K$  sans dimension pour une population de galaxies :

$$K = 5.10^{-3} \quad (5.3)$$

Nous pouvons par ailleurs remarquer que l'intégrale que nous avons à calculer est identique à celle mise en jeu lors de calcul de distances. Comme nous l'avons vu, l'effet d'une constante cosmologique croissante provoque une augmentation de la distance, donc de l'intégrale. Ainsi, dans un univers de courbure nulle, la probabilité d'observer un quasar victime d'une lentille gravitationnelle augmentera lorsque la densité d'énergie du vide sera croissante.

Aussi nous est-il possible d'illustrer ce que nous venons d'écrire en estimant numériquement cette profondeur optique en fonction d'une densité croissante du vide.

Prenons par exemple des quasars situés à des décalages spectraux 1 et 2 et étudions, pour une densité d'énergie du vide allant d'une valeur nulle à l'unité, la variation de cette profondeur optique (figure 5.1).

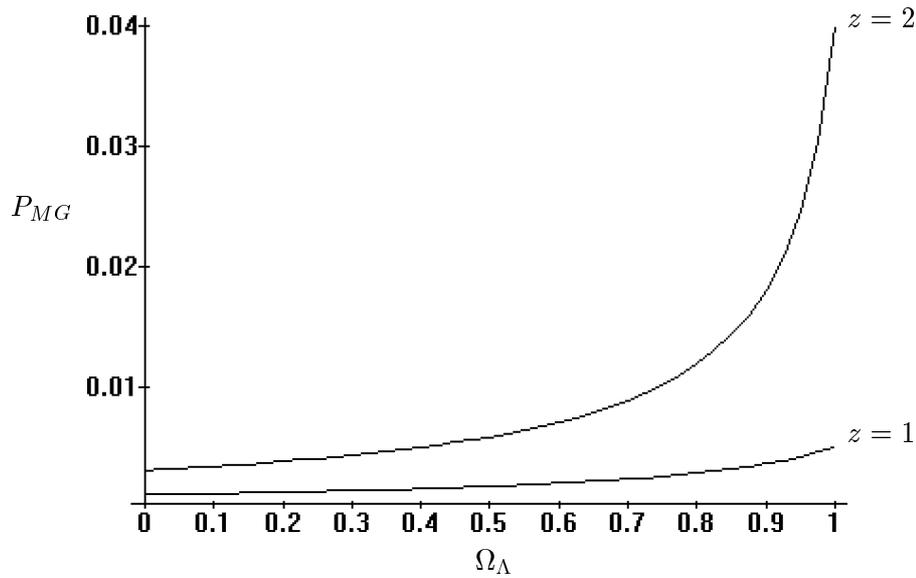


FIG. 5.1 – **Profondeur optique pour deux décalages spectraux de quasar** : dans le cas d'un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

Nous pouvons également, pour les cosmologies suivantes, estimer cette profondeur optique en fonction d'un décalage spectral quelconque de quasar (figure 5.2).

- $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$  : univers dominé par la densité de matière
- $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (0.1, 0.9)$  : univers dominé par la densité du vide

Nous constatons que lorsque les décalages spectraux des quasars deviennent suffisamment élevés, l'écart de profondeur optique se creuse entre les deux univers, qu'ils soient à densités du vide ou de matière dominante. Il atteint même l'ordre de grandeur pour les décalages spectraux les plus lointains observés.

Turner et al. (1984) et Gott et al. (1989) se sont uniquement concentrés sur le problème de la séparation angulaire entre images multiples. Cependant, Turner (1990) et Fukujita et al. (1990) ont insisté sur le fait que l'effet d'une constante cosmologique est plus important sur le nombre d'événements que sur la séparation angulaire. En outre, Fukujita et al. (1990) ont montré que la profondeur optique était très peu dépendante du modèle adopté pour la lentille (sphère isotherme ou masse ponctuelle par exemple). C'est en fait un point crucial pour envisager à terme une mesure de la constante cosmologique par ces méthodes. Utilisant les catalogues de quasars disponibles, Turner (1990) et Fukujita et al. (1990) montrent que le nombre de quasars multiples observés est incompatible avec une constante cosmologique supérieure à 0.7, pour un univers à courbure nulle.

Enfin, plus récemment, Cen et al. (1994) ont utilisé les analyses statistiques de lentilles comme test des théories de formation des structures. Ils ont comparé les prédictions des

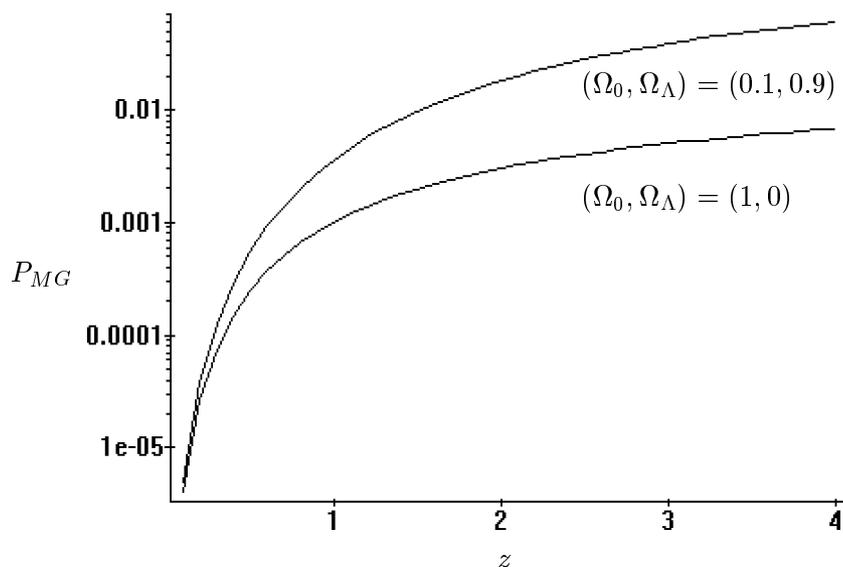


FIG. 5.2 – **Profondeur optique pour deux univers différents** : dans le cas d'un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

différents modèles cosmologiques - couplés avec des scénarii de formation des structures cosmiques - avec les observations. En analysant la distribution en séparation angulaire des images multiples, ils conclurent que le modèle «Cold Dark Matter» standard avec  $\Omega_0 = 1$  prédit beaucoup trop d'images à forte séparation angulaire. En revanche, un modèle CDM à faible densité de matière  $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$  serait compatible avec les données des catalogues.

L'optique gravitationnelle n'est donc pas restée en marge face à cette quête frénétique de la valeur de la constante cosmologique. Néanmoins, toutes les tentatives montrent que le problème est techniquement difficile à résoudre, les amplitudes de ces effets marginaux étant à la limite des possibilités actuelles d'observation. En attendant donc la venue d'instruments plus performants (HST ou VLT), la seule issue est de tenter de définir des méthodes nouvelles. C'est ce que nous proposons dans la suite...

Nous allons donc, dorénavant, développer une méthode originale, ne se basant plus sur les études statistiques, mais une modification de la séparation angulaire de mirages.

## 5.2 Une première approche à l'aide de l'équation des lentilles

### 5.2.1 Introduction

Nous avons étudié, dans les chapitres précédents, l'histoire et l'influence que pouvait avoir une constante cosmologique non nulle sur l'univers, et notamment sur la mesure de distances.

Cette mesure de distances intervenait par le rapport  $\frac{D_{LS}}{D_{OS}}$ , dans l'équation des lentilles, de même dans l'expression de l'amplification.

De plus, l'équation des lentilles et l'expression de l'amplification fournissent des contraintes sur la position des images, leur morphologie et leur luminosité. Ces paramètres que nous venons de citer sont des observables, et, à ce titre, notre travail va simplement consister, dans ce chapitre, à estimer si l'effet d'une constante cosmologique non nulle est mesurable ou pas.

### 5.2.2 Une première approche heuristique

Commençons tout d'abord à nous intéresser à un cas d'école, de manière à prendre conscience de l'ordre de grandeur de cette variation que nous devons mesurer.

Supposons que deux sources ponctuelles (des quasars par exemple), se trouvent à des décalages différents, et sont situées sur une même ligne de visée qu'un amas de galaxies, dont le profil du potentiel correspond à une sphère isotherme singulière.

La symétrie cylindrique de ce problème engendre, dans ce cas précis de position des sources et de forme de potentiel, la formation d'anneaux d'Einstein, dont nous pouvons estimer, à l'aide de l'équation des lentilles<sup>1</sup>, le rayon d'Einstein.

$$r_1 = 28.8'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_1 \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \quad (5.4)$$

$$r_2 = 28.8'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_2 \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \quad (5.5)$$

Le modèle cosmologique intervient donc dans le rapport des distances  $\frac{D_{LS}}{D_{OS}}$ . Une étude<sup>2</sup> de la variation du rapport précédent montre que l'influence d'une densité croissante du vide provoque une dilatation des anneaux.

---

<sup>1</sup>cf Annexes «Anneaux d'Einstein»

<sup>2</sup>cd Annexes «Etude du rapport des des distances»

Afin d'illustrer ce qui précède, traçons la variation de deux anneaux d'Einstein correspondante en fonction d'une densité croissante du vide (figure 5.3). Pour cela, considérons les hypothèses suivantes :

- un univers de courbure nulle :  $k = 0$  ou  $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$
- une lentille de dispersion de vitesse  $\sigma = 1000 \text{ km/s}$  avec  $z_L = 0.5$
- deux sources situées aux décalages spectraux  $z_1 = 1$  et  $z_2 = 2$

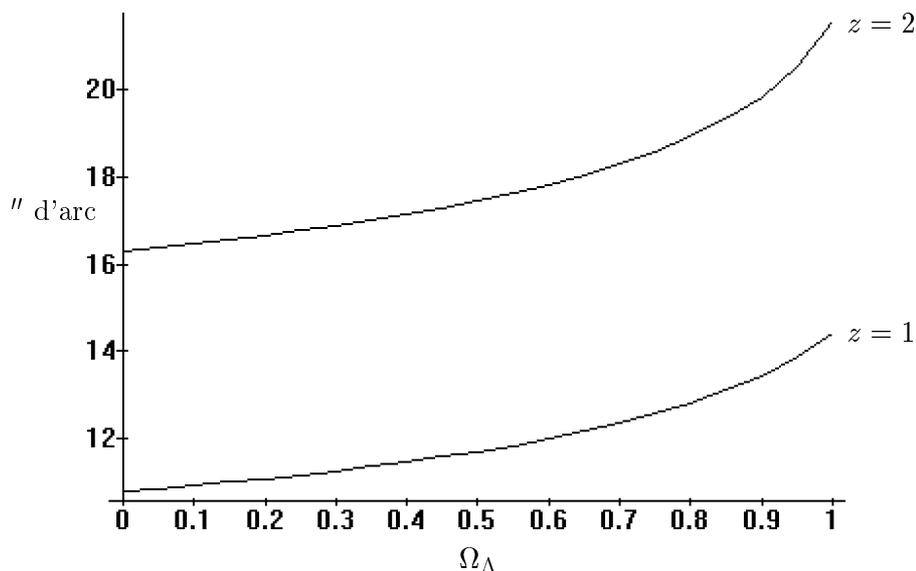


FIG. 5.3 – Evolution de deux rayons d'Einstein dans un univers à courbure nulle

Nous constatons qu'une densité non nulle du vide provoque une dilatation des anneaux d'Einstein. Cette dilatation est de l'ordre du cinquième de la dimension de l'anneau lorsque nous passons d'un univers de densité de matière dominante à un univers de densité du vide dominante. De plus, si nous possédons une lentille dont nous avons, avec une bonne précision, la forme du potentiel et les paramètres associés, nous pouvons conclure que l'influence d'une constante cosmologique sera parfaitement mesurable.

### 5.2.3 Une approche heuristique complémentaire

Malheureusement, nous ne connaissons pas d'amas de galaxies possédant une forme aussi simple de potentiel en sphère isotherme singulière, et la précision sur la mesure de dispersion de vitesse est, au mieux, de l'ordre de 10%. Cette incertitude sur la dispersion de vitesse provient, autant des erreurs de mesure sur les décalages spectraux des galaxies formant le déflecteur, que des surestimations possibles des dispersions de vitesse globales ou bien locales, dues à la présence de sous-structures (Fitchett & Whebster, 1988 et Mellier et al., 1988). Il nous faut donc parvenir à nous affranchir artificiellement des paramètres de cette lentille simple, en supposant, non plus des valeurs absolues de rayon d'Einstein,

mais des valeurs relatives. Une méthode triviale consiste alors à étudier le rapport des deux rayons d'Einstein, pour une densité croissante du vide.

Afin de connaître de manière relative cette variation de rapport des rayons d'Einstein, recherchons la relation liant  $r_1$  et  $r_2$  puis représentons la variation du rapport  $r_2/r_1$ . Nous obtenons :

$$r_2 = r_1 \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_2 \left( \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \right)_1 \quad (5.6)$$

Si nous calculons ce rapport à l'aide des mêmes paramètres, à savoir, un univers de courbure nulle, une lentille située à un décalage spectral de 0.5 et des sources situées aux décalages spectraux 1 et 2, nous parvenons aux résultats de la figure 5.4.

Nous pouvons ainsi remarquer que le premier rayon d'Einstein de la source la plus éloignée de nous, pour un rayon d'Einstein de la première source fixé, varie sensiblement pour une densité croissante du vide. Toutefois, nous sommes contraints de constater que la variation raisonnable (de l'ordre de 20%), d'un rayon d'Einstein individuel en fonction de la cosmologie se trouve réduite, dans le cas où nous effectuons le rapport de deux rayons d'Einstein, à un terme de l'ordre du pour-cent...

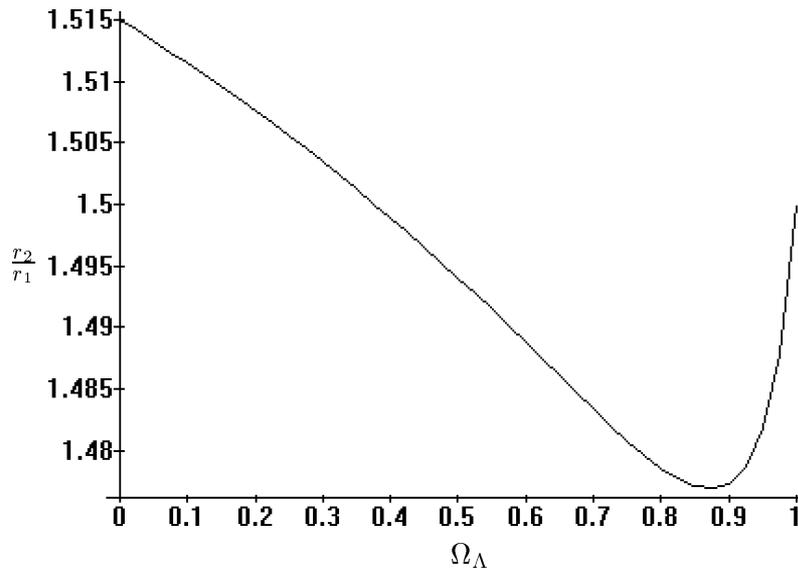


FIG. 5.4 – **Evolution du rapport des rayons d'Einstein** dans le cas d'un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

Supposons maintenant que nous voulions qu'un des deux anneaux reste fixe, quelle que soit la cosmologie, de manière à observer la variation de rayon du second anneau. Pour ce faire, nous sommes contraints de modifier les caractéristiques de la lentille, à savoir, ici,

la dispersion de vitesse de notre potentiel.

Si nous cherchons à avoir :  $r_1 = r'_1$  avec :

$$r_1 = 28.8'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_1 \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \quad (5.7)$$

$$r'_1 = 28.8'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)'_1 \left( \frac{\sigma'}{1000} \right)^2 \quad (5.8)$$

Nous obtenons immédiatement :

$$\sigma' = \sigma \sqrt{\left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)'_1 \left( \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \right)_1} \quad (5.9)$$

Ainsi, en remplaçant  $\sigma$  par  $\sigma'$  dans l'expression du rayon des anneaux, nous avons, en changeant de cosmologie, un anneau, de rayon  $r_1$  constant et l'autre, de rayon  $r_2$ , évoluant au gré de la cosmologie. Cette expression montre que, si nous désirons garder au même endroit l'un des anneaux, cela n'est possible qu'en diminuant la dispersion de vitesse que nous avons associée à la lentille. A ce stade, nous pressentons l'univers comme une lentille épaisse, d'une plus grande efficacité lorsque nous introduisons une constante cosmologique...

Traçons (figure 5.5) l'évolution de cette dispersion de vitesse centrale, avec :

- Un univers de courbure nulle :  $k = 0$
- Une source située au décalage spectral  $z = 2$
- Une lentille située au décalage spectral  $z = 0.5$ , de dispersion de vitesse centrale égale à  $\sigma = 1000 \text{ km/s}$  dans le cas  $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ ,
- Une densité croissante du vide :  $\Omega_\Lambda \in [0, 1]$

Aussi pouvons-nous remarquer que la variation de la dispersion de vitesse, pour une densité du vide croissante, se situe autour de 10%, pour des univers à densité du vide dominante. Cette variation se situe donc dans le domaine d'incertitude que nous avons sur la dispersion de vitesse centrale mesurée à partir de l'analyse de champs de vitesses.

Si nous réécrivons, à l'aide de 5.9, l'expression du rayon du second cercle d'Einstein sensible à cette constante cosmologique, nous obtenons :

$$r'_2 = 28.8'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)'_2 \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_1 \left( \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \right)'_1 \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \quad (5.10)$$

Réécrivons cette expression en fonction du rayon du premier cercle d'Einstein :

$$r'_2 = r_1 \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)'_2 \left( \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \right)'_1 \quad (5.11)$$

L'expression 5.11 est identique à celle que nous avons écrite dans l'estimation de l'influence relative d'une constante cosmologique sur le rapport des rayons d'Einstein.

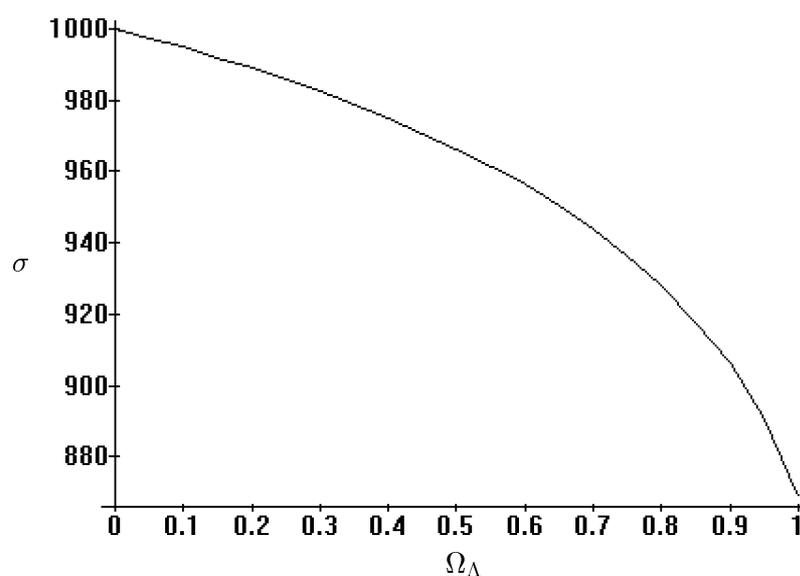


FIG. 5.5 – **Evolution de la dispersion de vitesse** dans le cas d'un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

En conclusion, la constante cosmologique entraîne une modification de l'ordre du **pour-cent** (0.3'' pour 30'') sur la position des cercles d'Einstein, lorsque des estimations relatives sont réalisées. Ce faible écart angulaire présage des difficultés que nous allons rencontrer par la suite.

## 5.3 Une approche originale ... mais réaliste

Cette section que nous allons développer est consacrée au travail du stage. Il s'agit d'une méthode originale utilisant les positions d'images d'un quasar et d'un nuage absorbeur pour déterminer la constante cosmologique. Dans une première partie, nous exposons le principe de la méthode. Ensuite, nous recherchons les écarts angulaires attendus entre chaque image du nuage dans un cas simple. Enfin, dans une troisième section, nous estimerons toutes les sources d'erreurs ou d'incertitudes qui pourraient invalider la méthode. Les perspectives concernant cette méthode sont analysées en conclusion.

### 5.3.1 Une introduction à la méthode

Comme nous nous en doutons, la nature ne fournit pas en réalité de distribution de mirages gravitationnels aussi parfaits que sont les anneaux d'Einstein. Il va donc être nécessaire, dans ce paragraphe, de développer une méthode plus réaliste tenant compte de conditions plus proches des observations.

Pour commencer, nous allons d'ores et déjà supposer que nous nous trouvons dans un univers de courbure nulle, donc de densité totale égale à la densité critique.

De plus, à cette condition restrictive, nous supposons que notre lentille prend une forme simple. Nous choisissons de ce fait une lentille ayant comme caractéristiques celles d'une sphère isotherme avec rayon de coeur. Ce potentiel, nous l'avons vu, n'est défini que par les deux paramètres suivants : la dispersion de vitesse centrale et le rayon de coeur  $r_0$ .

A cela, nous ajoutons certaines conditions sur les images. En effet, nous avons, dans le paragraphe précédent, fixé le rayon de l'un des anneaux et étudié la variation du rayon de l'autre anneau.

Hic et nunc, nous supposons qu'un quasar lointain, victime de la lentille, se trouve assez près de l'axe du potentiel pour être triplé. Sur ces trois images, seules deux nous intéressent et sont situées de part et d'autre du potentiel. Les quasars étant des objets quasi-ponctuels, nous pouvons mesurer avec une bonne précision ( $0.05''$  d'arc) la séparation angulaire entre les deux images. Cette séparation angulaire étant une *mesure*, il demeure une *contrainte* dans toute la suite du problème. Nous avons vu, par ailleurs, que la position des images était modifiée lorsque la cosmologie changeait. Il faudra de ce fait que nous expérimentions une méthode nous permettant de restituer la position des images du quasar ; ceci, quelle que soit la cosmologie utilisée. De plus, l'amplification de chacune des images du quasar devra rester constante. De manière à s'affranchir des fluctuations intrinsèques de luminosité du quasar, nous supposons en plus de ce qui précède que le rapport d'amplification demeure constant pour les deux images du quasar.

A cette position *statique* sur le ciel de deux images du quasar va s'ajouter une image issue d'une nébulosité. En effet, supposons que le faisceau de lumière formant une des images du quasar ait traversé, en amont de la lentille, un nuage extragalactique d'hydrogène. Nous verrons donc apparaître ce nuage superposé sur l'image du quasar. De plus, utilisant les raies d'absorption présente sur le spectre de cette image du quasar, nous pourrions aisément en déduire très précisément le décalage spectral du nuage, donc sa distance. Là aussi, cette image étant bel et bien superposée à une image du quasar, sa position demeure une contrainte.

Le principe de notre nouvelle méthode consiste donc à étudier la position de la contre-image éventuelle de ce nuage d'hydrogène, lorsque nous changeons notre cosmologie. Aussi, avant de calculer cette position d'image, il nous faudra, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, modifier les paramètres de la lentille pour rétablir la position des images du quasar, dans une cosmologie différente.

Afin d'observer cette contre-image, il nous faudra posséder un filtre possédant une très faible bande passante, pour observer avec un bon contraste puis mesurer la position des

images des nuages. Ceci ne peut se faire que si nous utilisons un filtre très précis. Le filtre interférentiel, composé de deux lames de verre séparées d'une distance comparable à la longueur d'onde observée, possède une bande passante très faible. Il faudra donc accorder la distance séparant les deux lames de verre avec le décalage spectral des nuages dont nous voulons observer les images.

Une autre méthode permet également de connaître à la fois position et décalage spectral de chaque image d'un nuage. Ces dispositifs sont des spectro-imageurs, dont deux instruments sont en préparation :

- Des fibres optiques conduisent les photons venant d'un objet vers une fente derrière laquelle un réseau disperse les photons vers un récepteur CCD (instrument FUEGOS du VLT)
- Une trame de lentilles focalise les photons venant d'une portion du ciel sur un disperseur derrière lequel se trouve un CCD (instrument TIGRE du CFHT)

Représentons alors notre «banc d'optique» naturel (figure 5.6) ainsi que le point de vue de l'observateur (figure 5.7).

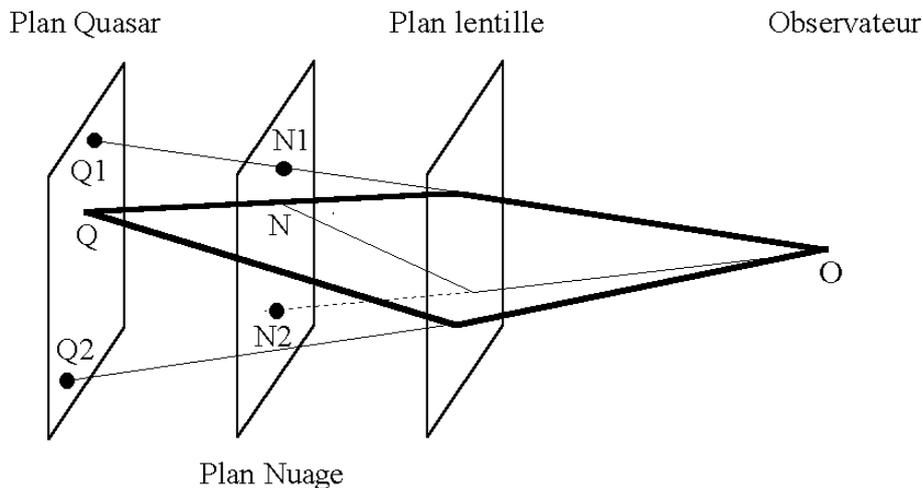


FIG. 5.6 – Banc d'optique proposé pour l'étude

Pour terminer cette présentation de la méthode, rappelons brièvement nos hypothèses ainsi que la méthode que nous allons pas à pas développer (précisons que pour chaque image, nous avons trois coordonnées ; les deux coordonnées donnant sa position sur le plan du ciel, et la troisième, proche de la profondeur de l'image, son décalage spectral).

Hypothèses :

- Un univers de courbure nulle
- Une lentille en sphère isotherme singulière avec rayon de coeur
- Une dispersion de vitesse centrale  $\sigma$  pour  $\Omega_0 = 1$
- Un rayon de coeur  $r_0$  pour  $\Omega_0 = 1$

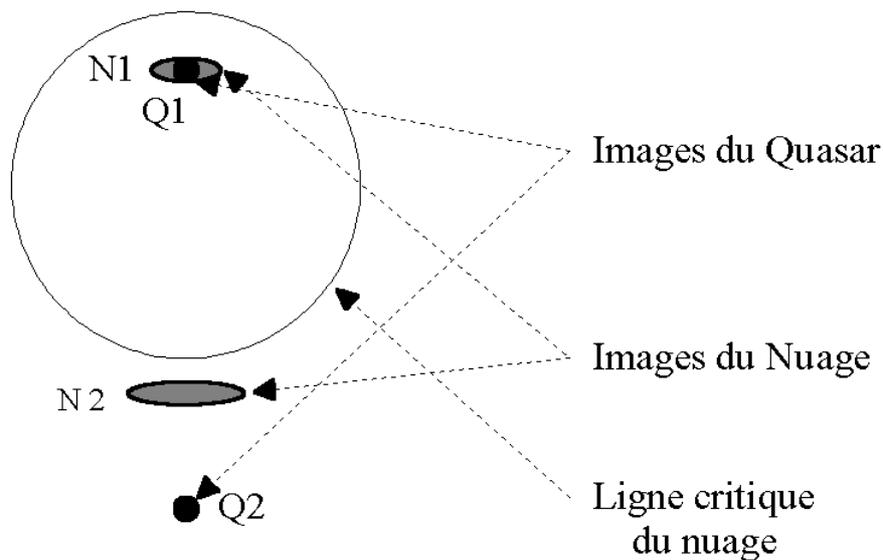


FIG. 5.7 – Point de vue de l'observateur

- Un quasar  $Q$ , donnant un ensemble de deux images  $Q_1$  et  $Q_2$  visibles et distinctes, de positions et d'intensités respectives suivantes :  $Q_1 = (x_{Q_1}, y_{Q_1}, z_{Q_1}, I_{Q_1})$  et  $Q_2 = (x_{Q_2}, y_{Q_2}, z_{Q_2}, I_{Q_2})$ .
- Un nuage  $N$ , donnant un ensemble de deux images  $N_1$  et  $N_2$ , où  $N_1$  est superposée à  $Q_1$ , de positions et d'intensités respectives suivantes :  $N_1 = (x_{N_1}, y_{N_1}, z_{N_1}, I_{N_1})$  et  $N_2 = (x_{N_2}, y_{N_2}, z_{N_2}, I_{N_2})$ .

Algorithme :

- Détermination des paramètres initiaux
- Recherche des nouveaux paramètres  $(\sigma', r'_0)$ , utilisant position et rapport d'amplification constants des images du quasar
- Calcul de la position du nuage  $N$  à partir de la position de son image  $N_1$
- Estimation de la position de la contre-image du nuage  $N_2$

Dans les quatre paragraphes suivants, nous allons développer chacun des points de l'algorithme que nous venons de définir.

### 5.3.2 Allocation des paramètres initiaux

Nous allons, dans ce paragraphe, donner les différents ordres de grandeur de chacun des paramètres nécessaire à l'étude de ce que nous venons d'évoquer dans le précédent paragraphe.

Pour commencer, il convient de préciser les décalages spectraux de chacun des objets, à savoir, le quasar, le nuage et la lentille. Aussi prendrons-nous les paramètres typiquement

observés, à savoir :

- Une lentille située à un décalage spectral  $z_L = 0.5$
- Un quasar situé à un décalage spectral  $z_Q = 2$
- Un nuage situé à un décalage spectral  $z_N = 1$

A cela s'ajoute le fait que l'univers que nous considérons étant de courbure nulle, nous prenons comme paramètres initiaux du couple  $(\Omega_0, \Omega_\Lambda)$  ceux d'un univers entièrement dominé par la matière :  $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$ .

A ce stade, remémorons-nous les mécanismes responsables de la multiplicité des images. En effet, comme nous l'avons écrit, celle-ci permet de contraindre le potentiel de la lentille ainsi que les paramètres associés à ce potentiel. Dans notre protocole, nous avons deux paires d'images visibles, pour un potentiel en sphère isotherme avec rayon de coeur. Le fait que nous ayons des images multiples impliquent que le quasar et le nuage se trouvent à l'intérieur de la ligne caustique. Le rayon de la ligne caustique dépendant du rayon de coeur et de la dispersion de vitesse centrale de la lentille, nous devons donc, dans notre étude, non seulement nous soucier des paramètres que nous fixons initialement à notre lentille, mais aussi des positions angulaires des images que nous désirons constantes, lorsque nous nous attaquerons à un cas d'école.

Ainsi, comme paramètres initiaux de la lentille, dans le cadre d'un univers de courbure nulle à densité de matière égale à la densité critique, nous prendrons ceux typiquement utilisés dans les modèles, ceci afin de donner autant de crédit que possible à notre étude.

Nous avons, pour les deux paramètres de la lentille :

- Une dispersion de vitesse autour de  $\sigma = 1000 \text{ km/s}$
- Un rayon de coeur projeté sur le ciel autour de  $r_0 = 5''$

### 5.3.3 Recherche des nouveaux paramètres de la lentille

Supposons que les positions et le rapport d'amplification des images du quasars sont fixes. A l'aide de l'équation des lentilles et pour un potentiel en sphère isotherme, nous pouvons tout d'abord écrire que :

$$r_{Q_1} - r_Q = 43.2'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right) \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \frac{r_{Q_1}}{\sqrt{r_{Q_1}^2 + r_0^2}} \quad (5.12)$$

$$r_{Q_2} - r_Q = 43.2'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right) \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \frac{r_{Q_2}}{\sqrt{r_{Q_2}^2 + r_0^2}} \quad (5.13)$$

En changeant de cosmologie, le rapport  $\frac{D_{LS}}{D_{OS}}$  se trouve modifié :

$$r_{Q_1} - r'_Q = 43.2'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)' \left( \frac{\sigma'}{1000} \right)^2 \frac{r_{Q_1}}{\sqrt{r_{Q_1}^2 + r_0'^2}} \quad (5.14)$$

$$r_{Q_2} - r'_Q = 43.2'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)' \left( \frac{\sigma'}{1000} \right)^2 \frac{r_{Q_2}}{\sqrt{r_{Q_2}^2 + r_0'^2}} \quad (5.15)$$

En soustrayant 5.12 à 5.13, puis 5.14 à 5.15, nous obtenons :

$$r_{Q_2} - r_{Q_1} = 43.2'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right) \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \left( \frac{r_{Q_2}}{\sqrt{r_{Q_2}^2 + r_0^2}} - \frac{r_{Q_1}}{\sqrt{r_{Q_1}^2 + r_0^2}} \right) \quad (5.16)$$

$$r_{Q_2} - r_{Q_1} = 43.2'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)' \left( \frac{\sigma'}{1000} \right)^2 \left( \frac{r_{Q_2}}{\sqrt{r_{Q_2}^2 + r_0'^2}} - \frac{r_{Q_1}}{\sqrt{r_{Q_1}^2 + r_0'^2}} \right) \quad (5.17)$$

Par une division de 5.16 par 5.17, nous en déduisons que :

$$\frac{\left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)' \sigma'^2}{\left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right) \sigma^2} = \left( \frac{r_{Q_2}}{\sqrt{r_{Q_2}^2 + r_0^2}} - \frac{r_{Q_1}}{\sqrt{r_{Q_1}^2 + r_0^2}} \right) \left( \frac{r_{Q_2}}{\sqrt{r_{Q_2}^2 + r_0'^2}} - \frac{r_{Q_1}}{\sqrt{r_{Q_1}^2 + r_0'^2}} \right)^{-1} \quad (5.18)$$

De plus, nous avons conservation du rapport d'amplification. En effet, pour une sphère isotherme avec rayon de coeur, l'expression de l'amplification d'une image se déduisait à partir de l'expression suivante :

$$A^{-1}(r_I, \sigma, r_0) = \left( 1 - \varphi_0 \frac{r_0}{(r_I^2 + r_0^2)^{3/2}} \right) \left( 1 - \frac{\varphi_0}{r_0} \frac{1}{\sqrt{r_I^2 + r_0^2}} \right) \quad (5.19)$$

avec

$$\varphi_0 = 43.2'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right) \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 r_0 \quad (5.20)$$

La conservation du rapport d'amplification s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{A(r_{Q_1}, \sigma, r_0)}{A(r_{Q_2}, \sigma, r_0)} = \frac{A(r_{Q_1}, \sigma', r_0')}{A(r_{Q_2}, \sigma', r_0')} \quad (5.21)$$

Comme nous nous en doutons, il va être particulièrement difficile de pouvoir résoudre analytiquement ce système. En effet, si nous développons les expressions des amplifications à l'intérieur de l'expression précédente, tout en remplaçant  $\sigma'$  par son expression en fonction de  $\sigma, r_0, r_{Q_1}, r_{Q_2}, r_0', (D_{LS}/D_{OS}), (D_{LS}/D_{OS})'$  l'équation avec pour seule inconnue  $r_0'$  est tout simplement infernale !

Toutefois, cet inextricable problème comporte une solution évidente. En effet, si nous supposons que le rayon de coeur demeure constant ( $r_0 = r_0'$ ), l'expression liant l'ancienne dispersion de vitesse à la nouvelle ( $\sigma \rightarrow \sigma'$ ) est identique à l'expression 5.9. De plus, l'amplification de chaque image demeure constante, et de ce fait, le rapport d'amplification se conserve de lui-même.

Ainsi, parmi les relations que nous recherchions pour satisfaire ces conditions de staticité des images et du rapport d'amplification, nous avons la solution évidente suivante :

$$\sigma' = \sigma \sqrt{\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_Q \left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right)_{4Q}} \quad (5.22)$$

$$r'_0 = r_0 \quad (5.23)$$

A partir de ce couple de solutions, nous sommes en mesure de préciser certains points, concernant les paramètres que nous pouvons définir. En effet, si nous cherchons à déterminer la ligne caustique de chaque source, le quasar et le nuage en l'occurrence, nous remarquons que le rayon de cette ligne caustique reste constant. En effet, l'expression de ce rayon est la suivante :

$$r_{SC} = r_0 \left[ \left( \frac{6\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS}} r_0^{-1} \right)^{2/3} - 1 \right]^{3/2} \quad (5.24)$$

Les conditions 5.22 et 5.23 impliquent que  $r_{SC}$  est constant lorsque nous modifions la cosmologie. Cette propriété était en fait impérative car, si le rayon de coeur avait varié dans de grandes proportions, nous aurions pu nous trouver dans une configuration où la source aurait traversé la ligne caustique et la multiplicité des images aurait changé.

A l'aide de l'expression 5.24, déterminons le «rayon caustique» du quasar :

$$r_{SCQ} = 12.89'' \quad (5.25)$$

De plus, les conditions 5.22 et 5.23 impliquent que la position du quasar, lorsque nous changeons de cosmologie, reste constante. En outre, cette dernière devra, projetée sur le ciel, être inférieure au rayon caustique que nous venons de calculer.

### 5.3.4 Calcul de la position du nuage

Lorsque nous changeons de cosmologie, pour calculer la position projetée du nuage, il nous suffit d'appliquer l'équation des lentilles, en prenant soin de modifier les paramètres liés à la lentille.

Nous avons de ce fait :

$$r_N = r_{N_1} \left[ 1 - 43.2'' \left( \frac{\sigma'}{1000} \right)^2 \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)'_N \frac{1}{\sqrt{r_{N_1}^2 + r_0'^2}} \right] \quad (5.26)$$

Lorsque nous avons calculé la position  $r_N$  du nuage, il nous faut vérifier que ce rayon est inférieur au rayon caustique du nuage, de manière à ce que nous conservions notre multiplicité d'images.

### 5.3.5 Calcul de la position de la contre-image du nuage

Une fois la position du nuage calculée, il ne reste plus qu'à réutiliser l'équation des lentilles pour retrouver la position de toutes les images correspondant à cette position du nuage.

A ce stade, nous pouvons utiliser le polynôme 4.53 que nous avons défini pour la recherche des racines de l'équation des lentilles.

Soit  $P(r_{N_I})$  ce polynôme, nous avons ainsi :

$$P(r_{N_I}) = ar_{N_I}^4 + br_{N_I}^3 + cr_{N_I}^2 + dr_{N_I} + e \quad (5.27)$$

Avec :

$$a = 1 \quad (5.28)$$

$$b = -2r_N \quad (5.29)$$

$$c = r_N^2 + r_0^2 - \left( 43.2'' \left( \frac{\sigma'}{1000} \right)^2 \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)'_N \right)^2 \quad (5.30)$$

$$d = -2r_N r_0^2 \quad (5.31)$$

$$e = r_N^2 r_0^2 \quad (5.32)$$

Dans les configurations que nous avons, il existe quatre racines réelles de ce polynôme. Reste à déterminer laquelle de ces quatre racines ne vérifie pas la convention de signe que nous avons mentionné en 4.62.

Parmi les trois solutions sélectionnées, nous devons bien évidemment retrouver  $r_{N_I}$ . La position de la contre-image  $r_{N_2}$  sera de signe opposée à  $r_{N_1}$  et de valeur absolue la plus grande.

Nous pouvons ainsi comparer, en changeant de cosmologie, la variation de position angulaire de la contre-image du nuage.

### 5.3.6 Une petite application

Afin de situer la variation de la position angulaire de la contre-image du nuage, prenons de cas où nous observons les deux images  $Q_1$  et  $N_1$  à la position angulaire suivante :

$$r_{N_1} = r_{Q_1} = 10'' \quad (5.33)$$

Reprenant toutes les hypothèses, nous traçons (figure 5.8, pour une densité du vide croissante, la distance angulaire séparant les deux images du nuage.

Nous pouvons ainsi constater que la variation de la séparation angulaire entre les deux images du nuage est de l'ordre du «pour-cent», ce qui correspond, dans notre cas, à  $0.8''$  pour une séparation de  $30''$ . Il faut donc que nous ayons une précision de cet ordre là pour espérer parvenir à contraindre la constante cosmologique. Le HST, par exemple, pourrait permettre de mesurer un tel écart de séparation angulaire, par sa résolution de  $0.1''$ .

Nous chercherons donc, dans la section suivante, à déterminer l'ordre de grandeur des fluctuations de cette même séparation angulaire provoquées par l'incertitude que nous avons sur les paramètres des sources et de la lentille.

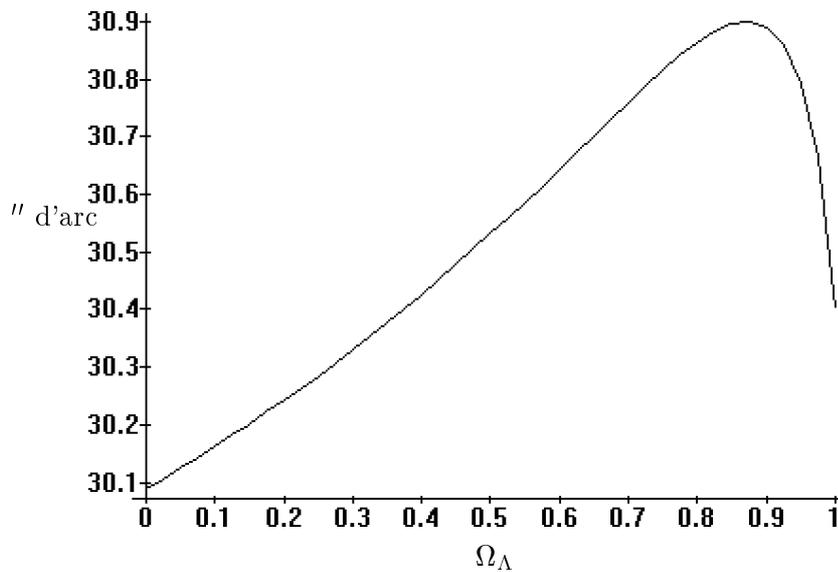


FIG. 5.8 – **Evolution de la séparation angulaire entre les deux nuages** dans le cas d'un univers de courbure nulle, en fonction d'une densité croissante du vide

### 5.3.7 L'utilisation d'absorbeurs multiples

A ce stade, étant donné le peu de marge de manoeuvre que nous possédons sur la contrainte de la constante cosmologique, une méthode statistique s'impose. En effet, supposons maintenant que les photons formant l'une des images du quasar traversent plusieurs nuages absorbeurs. Nous verrons donc apparaître, sur le spectre du quasar, des bandes d'absorption nous renseignant sur le décalage spectral de chacun des nuages traversé par les photons du quasar.

Si nous observons maintenant cette même zone du ciel avec un filtre de très faible bande passante, nous verrons apparaître avec un fort contraste tous les nuages absorbeurs, dans

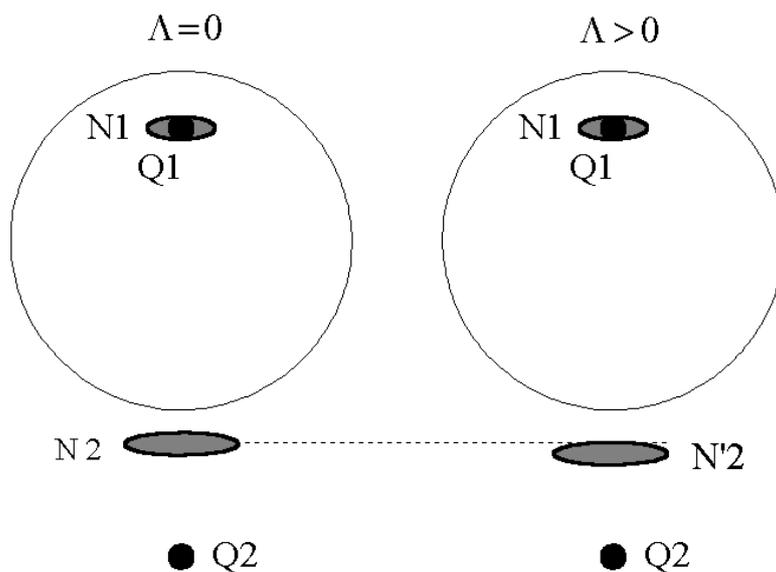


FIG. 5.9 – **Augmentation de la séparation angulaire entre les deux images du nuages** dans deux univers de courbure nulle avec et sans constante cosmologique

une bande très faible de décalage spectral. La distance séparant donc les deux images du même nuage pourra donc être mesurée pour un décalage spectral donné. Ainsi, modifiant la longueur d'onde passante moyenne de notre filtre, nous verrons une image d'un autre absorbeur - superposée à l'image de notre quasar -, et sa contre-image correspondante. Grâce à un grand nombre d'estimations de ce type, nous pourrions contraindre d'autant mieux la constante cosmologique, en s'affranchissant quelque peu de la lentille dans la mesure où les photons, qu'ils viennent du quasar ou des nuages absorbeurs, suivent une même géodésique donc sont soumis, à la traversée de la lentille, à un même potentiel.

Appliquons maintenant cette méthode à cinq absorbeurs, situés à des décalages spectraux entre 0.8 et 1.2. La figure 5.11 représente ainsi les séparations angulaires entre les deux images de chaque nuage, une des images de chaque nuage étant superposée à une des images du quasar,  $10''$  au dessus de l'axe du potentiel.

Comme nous nous en doutions, les variations individuelles de distance angulaire pour les images de chaque nuage sont de l'ordre du pour-cent. Une analyse statistique basée sur de nombreux nuages dont une image est située sur une même ligne de visée est donc envisageable, quoique très gourmande en temps de télescope.

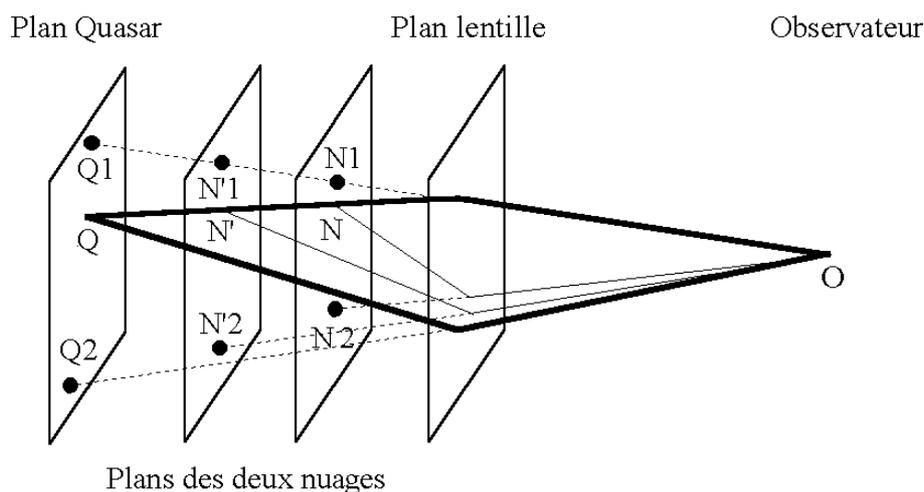


FIG. 5.10 – Configuration avec deux nuages

## 5.4 Incertitudes & Perturbations de notre banc d'optique

Sur chacun des paramètres que nous utilisons, il demeure une incertitude. Il devient alors nécessaire de connaître les variations, notamment sur les positions angulaires, provoquées par ces incertitudes, afin de les comparer aux variations que nous avons rencontrées lorsque nous comparions un univers avec ou sans constante cosmologique. Nous allons ainsi étudier, tour à tour l'influence :

- de l'incertitude sur la position angulaire des images
- de l'incertitude sur le décalage spectral des sources
- de l'incertitude sur le décalage spectral de la lentille
- de l'incertitude sur la dispersion de vitesse de la lentille
- de l'incertitude sur le rayon de coeur de la lentille
- de l'incertitude sur l'épaisseur de la lentille
- de l'effet d'une masse déflectrice proche de la ligne de visée

### 5.4.1 Incertitude sur la position angulaire des images

Nous avons vu, dans le paragraphe dédié à l'optique gravitationnelle, que la position des images permettait de revenir à la position de la source, aux paramètres de la lentille, ou bien encore à la cosmologie. Pour cela, la position de l'image sur le ciel doit être connue avec la meilleure précision possible. Nous avons ainsi, comme incertitudes sur ces positions d'images, de l'ordre du dixième de seconde d'arc. Le télescope spatial Hubble, avec tache d'Airy inférieure à  $0.1''$  d'arc, permet de connaître avec une meilleure précision la position de l'image, étalée sur un certain nombre de pixels de l'image. Nous pourrions donc atteindre de l'ordre du centième de seconde d'arc, en utilisant le télescope spatial.

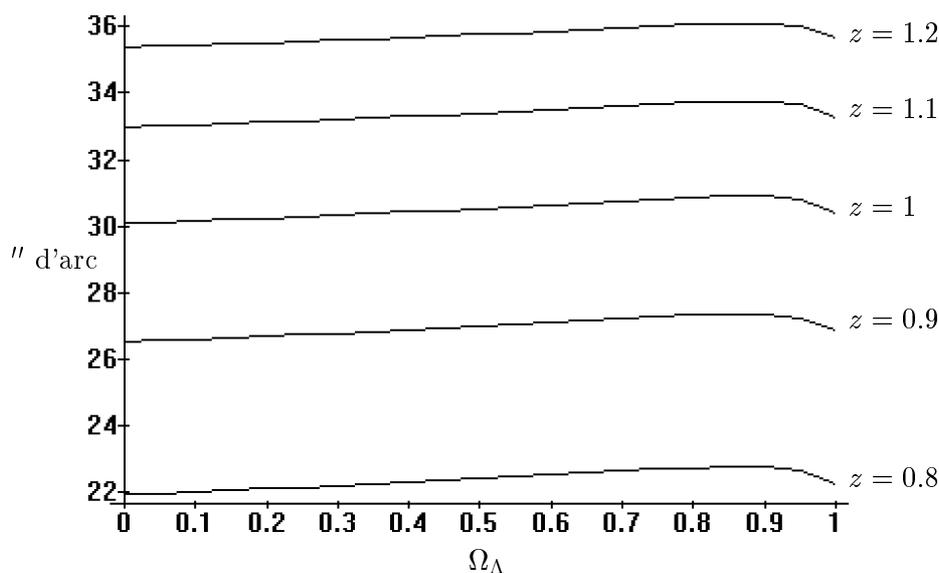


FIG. 5.11 – Evolution de la distance angulaire séparant les deux images de cinq nuages situés à des décalages spectraux entre 0.8 et 1.2, pour une densité croissante du vide

Cherchons par exemple à connaître, ayant une précision de  $0.1''$  sur la mesure de la position d'une image du nuage absorbant, superposée avec une des images du quasar, quel sera le déplacement opéré sur la position de la contre-image correspondante du nuage. Ainsi, si nous prenons les mêmes hypothèses que celles déjà supposées, nous pouvons tracer les trois courbes (figure 5.12) donnant l'évolution de la distance angulaire séparant les deux images du nuage, pour une image fixe placée aux distances angulaires de l'axe du potentiel suivantes :

$$r_{N_I} = 10'' \quad (5.34)$$

$$r_{N_I} = 10'' + \Delta r = 10.1'' \quad (5.35)$$

$$r_{N_I} = 10'' - \Delta r = 9.9'' \quad (5.36)$$

Ainsi, nous pouvons constater que dans un univers de courbure nulle, pour une densité croissante du vide, la distance angulaire séparant les deux images du nuage varie d'un cinquantième de seconde d'arc, lorsque nous introduisons une incertitude d'une dixième de seconde d'arc sur la position de l'image du nuage.

Ceci nous permet de conclure que l'influence d'une incertitude sur la position d'une image est négligeable comparé aux effets produits par une constante cosmologique non nulle.

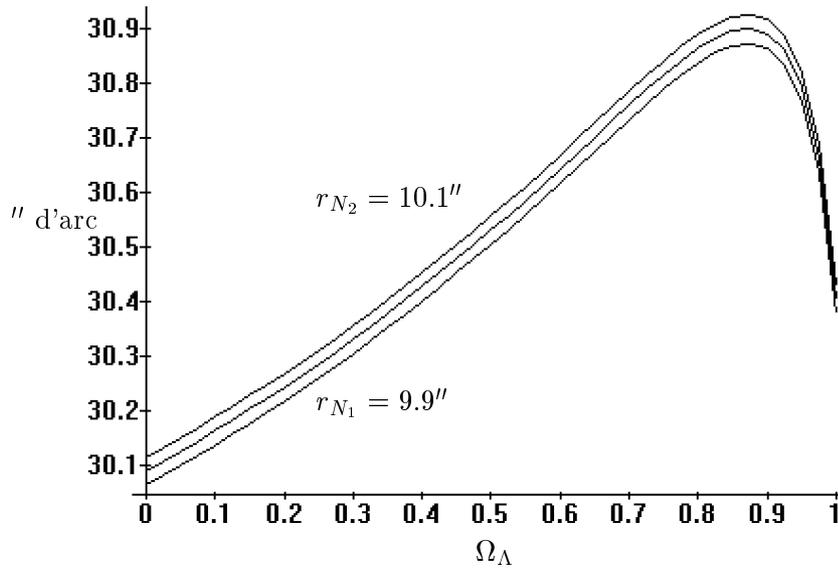


FIG. 5.12 – **Incertainitude sur la position du nuage** : sont représentées trois évolutions de la séparation angulaire entre les images du nuage pour trois positions d'images séparées de  $0.1''$  d'arc, en fonction d'une densité croissante du vide

#### 5.4.2 Incertainitude sur le décalage spectral des sources

Le décalage spectral des sources intervient, nous l'avons vu maintes et maintes fois, sur le rapport des distances. Ce rapport des distances est, en plus, capital étant donné que l'influence de la constante cosmologique intervient également par ce rapport de distances. Nous allons donc étudier quelle sera l'influence d'une incertainitude sur le décalage spectral, intervenant sur la distance angulaire séparant les deux images du nuages.

Le cas que nous avons développé nécessite donc deux sources, un quasar et un nuage. Nous pouvons, étudiant le spectre du quasar, déterminer le décalage spectral de celui-ci. De plus, le nuage absorbant modifie le spectre de l'image du quasar par l'apparition de bandes d'absorption sur celui-ci. La longueur d'onde des bandes d'absorption nous permet ensuite de revenir au décalage spectral du nuage.

Observationnellement, les décalages spectraux des objets se mesurent avec une précision allant du centième au millième. Aussi, nous supposons que la précision que nous avons est, quel que soit l'objet, inférieure au centième. A ce stade, nous pouvons connaître, pour une incertainitude sur le décalage spectral du nuage du centième, quelle sera son influence sur la distance angulaire séparant les deux images de celui-ci. Ainsi, si nous prenons trois nuages des décalages spectraux suivants :

$$z_N = 1 \quad (5.37)$$

$$z_N = 1 + \Delta z = 1.01 \quad (5.38)$$

$$z_N = 1 - \Delta z = 0.99 \quad (5.39)$$

$$(5.40)$$

Nous pouvons tracer (figure 5.13) l'évolution de la distance séparant les deux images du nuages, pour une densité croissante du vide.

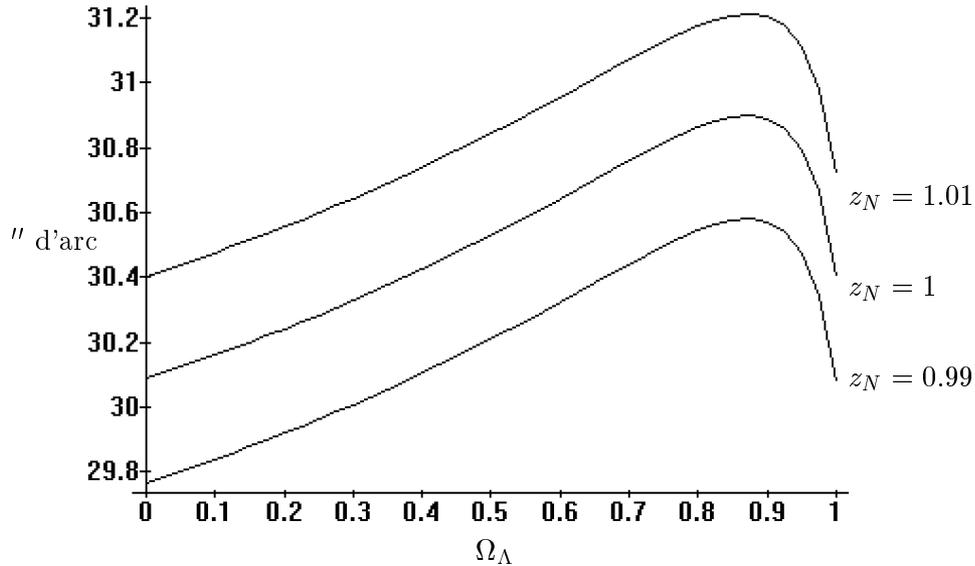


FIG. 5.13 – **Incertitude sur le décalage spectral du nuage** : sont représentées les évolutions de la séparation angulaire entre les images du nuage avec une incertitude du centième sur son décalage spectral, pour une densité croissante du vide

Comme nous pouvons le constater, l'influence d'une incertitude sur le décalage spectral du nuage a des effets, qui, comparés à ceux de la constante cosmologique, sont loin d'être négligeables. Les deux effets sont comparables. Nous sommes donc contraints de signaler qu'une précision du centième sur la mesure du décalage spectral est donc loin d'être suffisante.

Supposons maintenant que nous ayons une précision du millièm, et traçons (figure 5.14) comme précédemment, l'évolution de la distance angulaire en fonction de la cosmologie, pour les décalages spectraux  $z_N = 1$ ,  $z_N = 1.001$  et  $z_N = 0.999$ .

Nous constatons maintenant que lorsque la précision que nous avons sur le décalage spectral du nuage est du millièm, l'influence de cette incertitude demeure négligeable comparée aux effets d'une constante cosmologique non nulle.

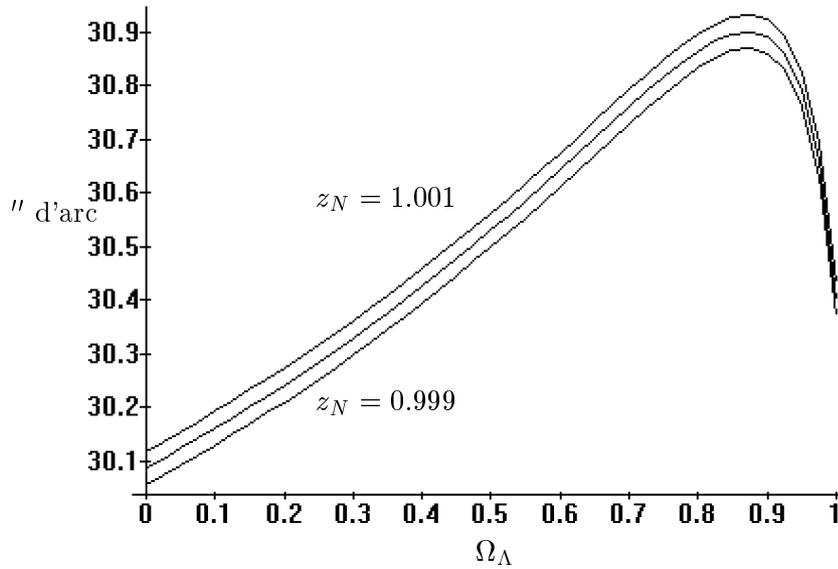


FIG. 5.14 – **Incertainitude sur le décalage spectral du nuage** : sont représentées les évolutions de la séparation angulaire entre les images du nuage avec une incertainitude du millièmme sur son décalage spectral, pour une densité croissante du vide

### 5.4.3 Incertainitude sur le décalage spectral de la lentille

Ainsi, dans le paragraphe précédent, le décalage spectral de la lentille intervient dans le rapport des distances, présent dans l'équation des lentilles et la matrice d'amplification.

De plus, sur ce décalage spectral de la galaxie ou de l'amas de galaxies constituant la lentille, nous possédons une précision là encore comprise entre le centièmme et le millièmme.

Si nous supposons que nous nous plaçons une fois encore dans les hypothèses déjà considérées, si nous prenons une incertainitude égale au centièmme, nous avons, pour une valeur nominale du décalage spectral, les trois courbes suivantes (figure 5.15) pour lesquelles :

$$z_L = 0.5 \quad (5.41)$$

$$z_L = 0.5 + \Delta z = 0.51 \quad (5.42)$$

$$z_L = 0.5 - \Delta z = 0.49 \quad (5.43)$$

$$(5.44)$$

Nous pouvons alors constater, comme dans le paragraphe précédent, que la distance angulaire séparant les deux nuages est particulièrement sensible à une incertainitude sur le décalage spectral de la lentille. Les effets sont plus importants que ceux constatés du fait de l'introduction d'une constante cosmologique.

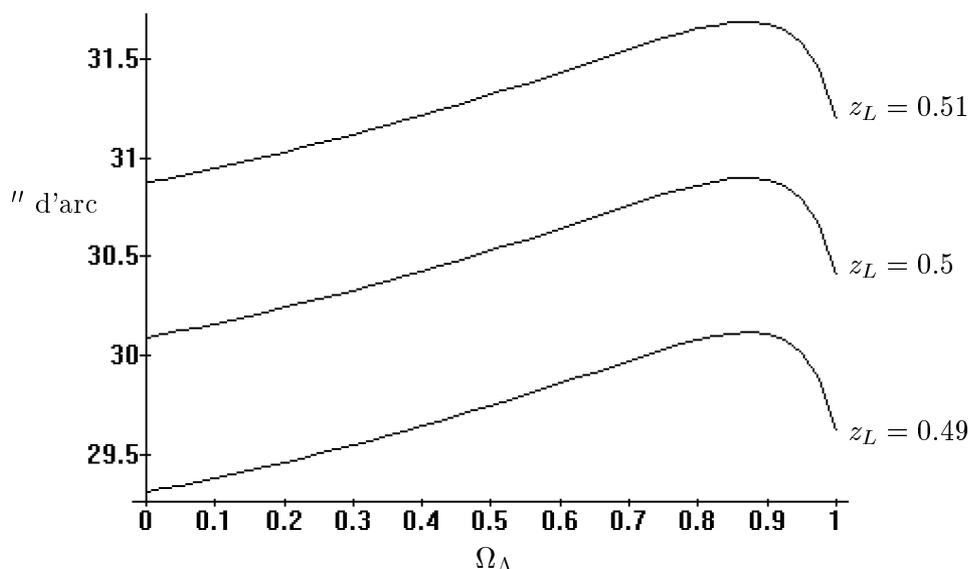


FIG. 5.15 – **Incertitude sur le décalage spectral de la lentille** : sont représentées les évolutions de la séparation angulaire entre les images du nuage pour une précision du millièmme sur le décalage spectral de la lentille, en fonction d'une densité croissante du vide

Il va là encore être nécessaire, si nous désirons que cette méthode nous donne des résultats tangibles, connaître le décalage spectral de la lentille avec une précision de l'ordre du millièmme, de manière que les effets de cette incertitude soient bien inférieurs aux effets d'une constante cosmologique non nulle.

Ainsi, si nous retraçons les courbes précédentes dans les mêmes conditions, avec cependant les décalages spectraux de la lentille  $z_L = 0.5$ ,  $5.501$  et  $0.499$ , nous obtenons les résultats présentés sur la figure 5.16.

Ainsi, si nous avons une précision du millièmme sur le décalage spectral de la lentille, l'influence des incertitudes sur ce décalage spectral est négligeable comparé aux effets d'une constante cosmologique non nulle.

Cette précision du millièmme, bien que difficile à obtenir, est tout de même concevable. Elle est cependant atteinte sur beaucoup d'amas, mais ceci à condition que la lentille forme un plan unique, c'est à dire que l'approximation des lentilles minces est toujours valable.

#### 5.4.4 Incertitude sur la dispersion de vitesse de la lentille

La dispersion de vitesse de la lentille est un paramètre, lui, particulièrement difficile à déterminer avec précision. Caractéristique de la masse de l'amas, cette dispersion peut être estimée à partir de l'analyse des champs de vitesse de l'amas de galaxies, notamment

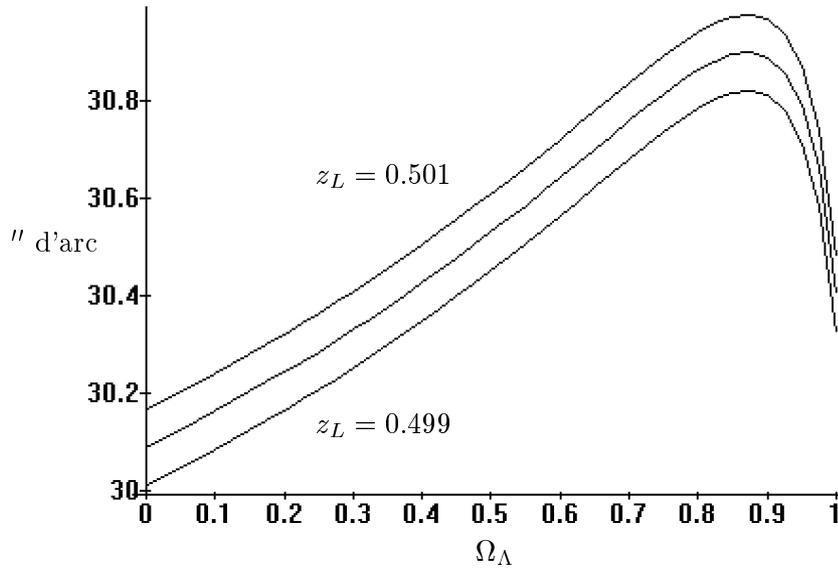


FIG. 5.16 – **Incertitude sur le décalage spectral de la lentille** : sont représentées les évolutions de la séparation angulaire entre les images du nuage pour une précision du millièmè sur le décalage spectral de la lentille, en fonction d'une densité croissante du vide

dans le domaine des rayons X, témoin de la présence d'un gaz très chaud entre les galaxies.

Cette incertitude sur les dispersions de vitesse par l'analyse des décalages Doppler-Fizeau se situe autour de dix pour-cent. Ainsi, nous traçons la variation de la séparation angulaire entre les deux images du nuage (figure 5.17), pour une incertitude sur la dispersion de 10%, c'est-à-dire dans les trois cas suivants :

$$\sigma = 1000 \text{ km/s} \quad (5.45)$$

$$\sigma = 1000 + \Delta\sigma = 1100 \text{ km/s} \quad (5.46)$$

$$\sigma = 1000 - \Delta\sigma = 900 \text{ km/s} \quad (5.47)$$

Nous constatons avec stupeur que l'influence d'une incertitude de 10% dépasse sans commune mesure les effets d'une constante cosmologique non nulle. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où la dispersion de vitesse apparaît au carré dans l'équation des lentilles. Elle y est donc très sensible.

Cependant, il ne faut pas céder à la panique, car l'analyse des champs de vitesses n'est pas le seul et unique moyen de parvenir à une estimation plus fiable de la dispersion de vitesse. En effet, l'utilisation de plusieurs configurations de mirages peut permettre de contraindre, dans une cosmologie donnée, la dispersion de vitesse. Si la cosmologie et la dispersion nous rendent compte de l'ensemble des autres configurations, elles demeurent une solution à notre problème. Cette méthode peut, par exemple, être appliquée au cas

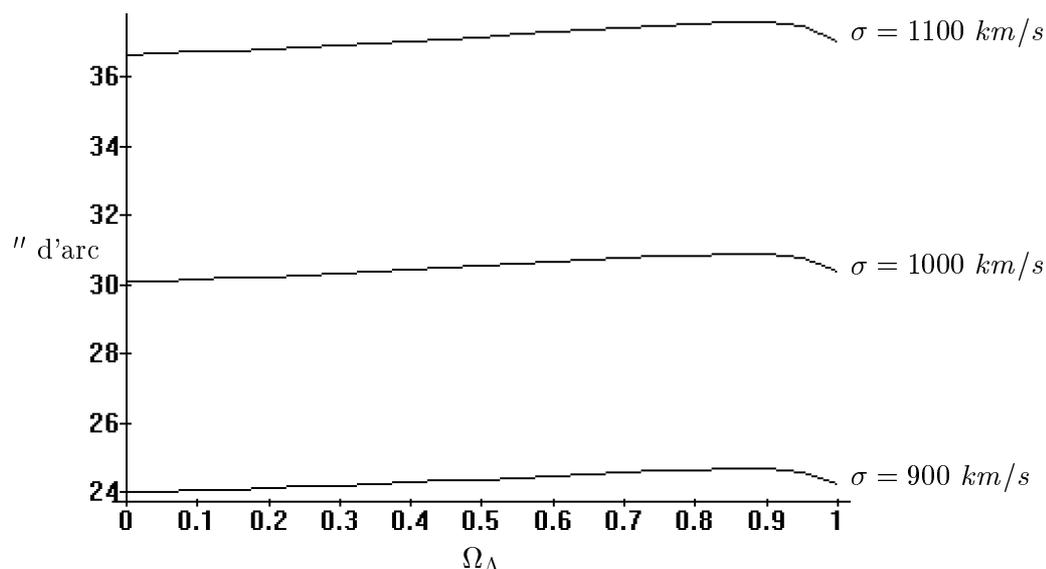


FIG. 5.17 – **Incertitude sur la dispersion de vitesse** : sont représentées les évolutions des séparations angulaires entre les images du nuage pour trois dispersions de vitesses de la lentille, en fonction d'une densité croissante du vide

d'absorbeurs multiples sur une même ligne de visée. Alors, seules une cosmologie et une dispersion de vitesse pourront conduire à une telle distribution de mirages.

Tâchons à ce stade de connaître quelle devra être, à partir de la précision que nous recherchons sur la dispersion de vitesse, la résolution de spectrographes à haute résolution que sont par exemple FUEGOS ou TIGRE. Supposons que nous voulions une connaissance de la dispersion de vitesse de la lentille avec une précision  $\delta v = 30 \text{ km/s}$ . A partir d'une corrélation au tiers de pixel de cette précision, l'écart de dispersion de vitesse que nous désirons connaître entre deux pixels devient de  $90 \text{ km/s}$ . Nous avons ainsi :

$$\frac{\delta \nu}{c} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{R} \quad (5.48)$$

La résolution nécessaire pour connaître la dispersion de vitesse d'un amas avec une précision entre deux pixels de  $90 \text{ km/s}$  devient de 3300. Cette résolution sera par exemple accessible par FUEGOS, ayant une résolution de 30000. Toutefois, une telle résolution théorique ne peut s'appliquer aux objets que nous observons typiquement. En effet, les arcs sont de magnitude supérieure à 25, il n'est donc pas concevable d'utiliser cette résolution, afin qu'un nombre raisonnable de photons puissent former le spectre de l'objet, avec un rapport signal sur bruit convenable.

### 5.4.5 Incertitude sur l'épaisseur de la lentille

Lorsque nous déterminons le décalage spectral d'un objet de la lentille, ce décalage spectral contient, en plus de la composante cosmologique, le décalage Doppler dû à la dispersion de vitesse propre d'un élément formant la lentille. Il faut donc confondre la variation du décalage spectral cosmologique d'un objet, dû au fait que la lentille est épaisse avec la dispersion de vitesse propre de l'objet. Cette erreur nous donne, à la fois une erreur sur la dispersion de vitesse et sur le décalage spectral cosmologique moyen de la lentille.

La lentille n'étant plus mince, l'équation des lentilles devient obsolète. Nous serons donc contraints d'utiliser une autre technique donc la méthode se rapproche de la méthode des lancés de rayons, basée sur l'équation scalaire optique. Seule cette équation pourra permettre une quantification de ce déplacement d'image, dû à cette incertitude sur l'épaisseur de notre lentille, entraînant erreur sur la dispersion et sur le décalage spectral moyens de la lentille.

### 5.4.6 Incertitude sur le rayon de coeur de la lentille

Le rayon de coeur désigne donc le rayon pour lequel la moitié de la masse est située en deçà de ce rayon. Sur ce dernier paramètre, comme sur la dispersion de vitesse, il demeure une grande incertitude. Aussi, son incertitude est-elle de l'ordre de grandeur de sa valeur.

Traçons pour les trois rayons de coeur suivants :  $r_C = 5''$ ,  $r_C = 7.5''$  et  $r_C = 2.5''$ , la variation de la distance angulaire séparant les deux images de notre nuage, pour une densité croissante du vide (figure 5.18).

Comme nous pouvons le constater, l'influence de cette incertitude sur le rayon de coeur est bien supérieure aux effets d'une constante cosmologique non nulle.

Toutefois, comme dans le précédent paragraphe, il demeure possible, à partir de multiples configurations, de contraindre notre lentille, en dispersion de vitesses, mais aussi en rayon de coeur. Nous pourrions donc parvenir à une estimation satisfaisante du rayon de coeur, par une analyse globale de toutes les configurations d'images possibles.

### 5.4.7 Perturbation d'une masse défectrice autre que la lentille

Supposons que, au voisinage de la géodésique suivie par le photon, une faible masse défectrice dévie le pinceau de photons. Nous nous trouvons alors en face d'une lentille composite. Le plan-image de la première lentille, que constitue la masse défectrice, devient le plan-source de la seconde lentille. Il se produira donc une perturbation de la trajectoire, qui, auparavant donnait au plan-lentille la direction de la source, mais maintenant indique une direction différente. Le plan-image de la seconde lentille, image du plan-image de la première lentille sera donc quelque peu différent du plan-source sans la première lentille. Cette différence peut donc induire des modifications de positions de images, que seule une

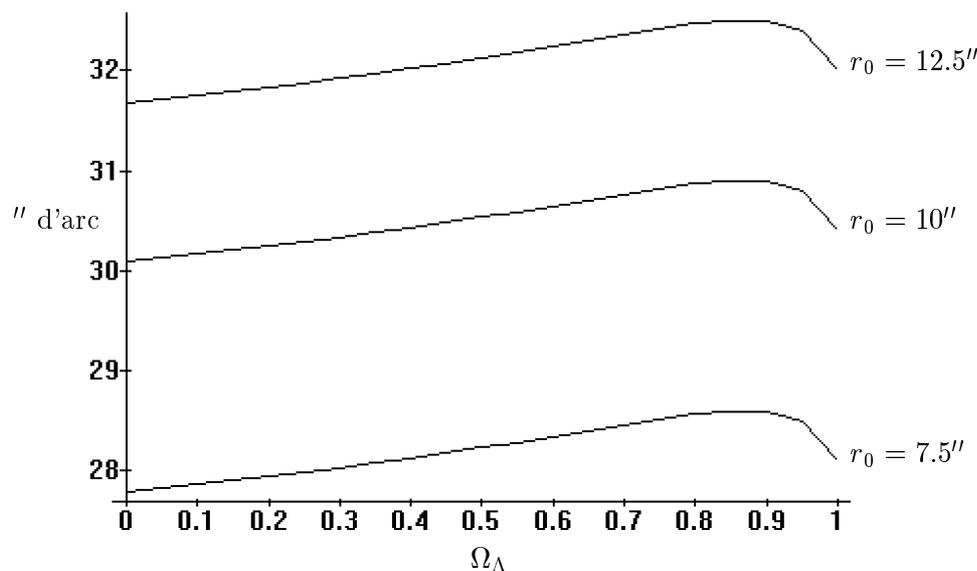


FIG. 5.18 – **Incertitude sur le rayon de coeur** : sont représentées trois évolutions de la séparation angulaire entre les images du nuage pour trois rayons de coeur de lentille, en fonction d'une densité croissante du vide

approche rigoureuse, à l'aide de deux équations des lentilles (une pour chaque lentille) permet de résoudre.

## 5.5 Conclusion

Nous avons donc étudié, durant tout ce chapitre, quelle pouvait être l'influence d'une constante cosmologique non nulle sur la répartition des mirages gravitationnels. Nous avons démontré que :

- la modification de la position angulaire d'une image sous l'influence d'une constante cosmologique est de l'ordre de la seconde d'arc.
- les incertitudes que nous avons sur les paramètres des sources ou de la lentille conduisent à des effets sur la séparation des images très supérieurs à ce que nous devons mettre en évidence.

La solution de ce problème se trouve probablement en une analyse combinée de tous les paramètres liés à la cosmologie, aux sources et à la lentille. L'utilisation de configurations multiples de nuages que nous avons évoquée peut permettre une analyse combinée de la lentille et de la cosmologie, à condition toutefois que nous ayons une bonne mesure de leurs décalages spectraux respectifs. A cette configuration complexe, certes, ne correspond qu'un seul et unique jeu de paramètres, liés à la lentille ou à la cosmologie.

Reste maintenant à trouver une configuration observationnelle telle que nous l'avons décrite dans le paragraphe (V.B.1). Si nous parvenons à identifier un certain nombre de nuages en absorption sur la ligne de visée d'une des images d'un quasar, nous pouvons envisager une application directe de notre méthode. Le seul problème réside alors en l'élaboration d'un algorithme performant permettant l'utilisation de toutes les observables des images, qu'il s'agisse de leur position, de leur amplification ou leur forme. Une combinaison de ces analyses, associée à une idée que nous avons des paramètres de la lentille permettrait, sans nul doute, d'imposer une réelle contrainte sur la constante cosmologique...



# Chapitre 6

## Conclusion générale

Les illusions tombent l'une après l'autre, comme les écorces d'un fruit, et le fruit, c'est l'expérience. Sa saveur est amère; elle a pourtant quelque chose d'âcre qui fortifie.

Gérard de Nerval, *Les Filles du Feu*

Commençant ce rapport, nous recherchions sinon une estimation, du moins une contrainte de la constante cosmologique, partant du postulat que celle-ci existait bel et bien.

Au moment de conclure notre rapport, acceptons l'évidence : dans le cadre dans lequel nous nous sommes placés, compte tenu des performances des instruments actuels, l'optique gravitationnelle ne permet, en aucun cas, de fixer la constante cosmologique. Le mystère demeure donc entier...

Malgré la déception de notre méthode, nous ne devons en aucune façon oublier que se cachent d'autres techniques, basées sur l'influence de la constante cosmologique sur diverses observables. En effet, qu'il s'agisse par exemple de la densité comobile d'objets ou de la probabilité de mirages gravitationnels, ces observables connaissent des variations d'un ordre de grandeur entre les divers modèles cosmologiques, alors que notre méthode se contentait d'un misérable pour-cent. De nouvelles méthodes d'investigation, basées sur de telles observables, demeurent donc plus à même de permettre, d'ici quelque temps, une estimation réelle de la constante cosmologique.

Malheureusement, le couplage entre les différents paramètres cosmologiques impose une prudence de rigueur. Mais, le voile levé d'autres observables, la constante de Hubble par exemple, permettra-t-il à la constante cosmologique de se libérer elle-même des incertitudes qui l'emprisonnent ? La cosmologie n'est-elle pas qu'une tour de Babel qu'il nous faut continuer de construire... et ce quelles qu'en soient les mutations dans les années à venir.

Nous terminons par ces paroles de Napoléon Bonaparte à Joséphine :

Qu'est-ce que l'avenir ? Qu'est-ce que le passé ? Qu'est-ce que nous ? Quel fluide magique nous environne et nous cache les choses qu'il nous importe le plus de connaître ? Nous naissons, nous vivons, nous mourrons au milieu du merveilleux...

# Chapitre 7

## Annexes

Pour bien savoir les choses, il faut en savoir le détail...

La Rochefoucauld, *Réflexions ou Sentences et Maximes morales*

## 7.1 Différents regards sur la constante cosmologique

### 7.1.1 Modèle de Seeliger & Neumann

Supposons un univers à symétrie sphérique, de densité isotrope  $\rho$ . Si nous appliquons la seconde loi de Newton à un élément de l'univers situé à une distance  $r$ , nous avons :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \quad (7.1)$$

La masse  $M$  de l'univers a pour expression :  $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Notre problème possédant une symétrie radiale, nous avons :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right) = -\left( \frac{4\pi G \rho}{3} \right) m r \quad (7.2)$$

Le signe du second membre montre que si aucune force ne vient s'opposer à la force de gravitation classique, chaque élément de masse de l'univers va tomber vers le centre. L'univers va ainsi s'effondrer en son centre. Il est donc impossible d'avoir un univers statique obéissant aux lois de Newton, sous l'action de la force de gravitation.

Si nous désirons un univers statique, le premier membre, dépendant du temps, doit être nul. Au second membre doit être ajouté un second terme égal et opposé, tel que, pour tout  $r$ , nous ayons un univers statique.

Cette force, opposée à la gravitation classique, doit ainsi être proportionnelle à la masse  $m$  de l'élément ainsi qu'à la distance  $r$  séparant cet élément du centre de l'univers. Nous pouvons alors écrire cette force sous la forme suivante :

$$F_\lambda = \lambda m r \quad (7.3)$$

L'équation du mouvement se réécrit alors :

$$\frac{\ddot{r}}{r} = -\left( \frac{4\pi G \rho}{3} \right) + \lambda \quad (7.4)$$

Ainsi, dans un univers statique, la constante cosmologique  $\lambda$  a pour expression :

$$\lambda = \frac{4\pi G}{3} \rho \quad (7.5)$$

Si nous donnons à cet univers statique une densité de masse  $\rho$  de l'ordre de  $10^{-27} \text{ kg/m}^3$  (ou  $10^{-30} \text{ g/m}^3$ ), nous obtenons :  $\lambda \approx 10^{-37} \text{ s}^{-2}$ .

### 7.1.2 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein constituent, nous l'avons dit, une expression du principe de Mach stipulant que la géométrie de l'espace dépend de la matière que contient cet espace. Si nous écrivons les équations dans leur forme la plus générale sous forme tensorielle, nous obtenons :

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (7.6)$$

Cette expression des équations d'Einstein constitue en fait un ensemble de 16 équations différentielles de chacune des composantes de l'espace-temps choisi (trois composantes caractérisant l'espace et une le temps).

Le terme de gauche est celui caractérisant la géométrie de l'espace, c'est-à-dire la courbure locale de l'espace en un point de cet espace-temps.

Le terme de droite évalue la matière dans la géométrie considérée. Ce terme est familier des adeptes de la mécanique des fluides puisqu'il porte parmi ses 16 composantes les caractéristiques *locales* d'un fluide : la pression suivant chacun des axes de l'espace et la densité du fluide. Ce tenseur, plus fort encore, incarne à lui seul les lois de conservation de la quantité de mouvement et d'énergie.

Etant donné que quantité de mouvement et énergie sont des intégrales premières du mouvement d'un fluide, il est possible de définir un opérateur différentiel tel que cet opérateur appliqué au tenseur d'impulsion-énergie sera équivalent aux lois de conservation mécaniques de la quantité de mouvement et de l'énergie. Cet opérateur porte le nom de dérivée covariante de tenseur.

Pour un tenseur covariant du second ordre, nous avons pour définition de la dérivée covariante l'expression suivante :

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} T_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma} T_{\gamma\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\gamma} T_{\mu\gamma} \quad (7.7)$$

D'un point de vue calculatoire, le terme  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  caractérise la connexion affine qui établit une relation entre le référentiel inertiel local, à la base du principe d'équivalence et l'espace-temps courbé par la matière présente mathématiquement dans le tenseur d'impulsion-énergie. Ce *symbole de Christoffel* va donc dépendre de la *métrique*, la relation intime liant les différentes composantes de l'espace-temps considéré. L'expression liant ce symbole à la métrique est la suivante :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_{\beta} g_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma} g_{\beta\delta} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma}) \quad (7.8)$$

Chacun des termes  $g_{\mu\nu}$  de la métrique établit la relation entre les trois composantes d'espace  $x^1$ ,  $x^2$  et  $x^3$  et la composante temporelle  $|x^0| = ct$ . Les composantes d'espace peuvent être identiques aux coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  ou aux coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  d'un vecteur liant un référentiel choisi à l'objet considéré. La métrique possède l'intéressante propriété d'être invariante par translation dans l'espace-temps. Cette

propriété a pour origine le principe de moindre action où une particule suit une trajectoire stationnaire, c'est-à-dire qu'elle se déplace d'un endroit à un autre de l'espace-temps en un temps minimum, lorsqu'elle est soumise à un ensemble de forces conservatives. Cette métrique peut donc s'assimiler à une distance séparant deux événements infiniment voisins dans l'espace-temps. Le terme invariant est communément noté  $ds$ , et la métrique a donc pour expression la suivante :

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.9)$$

Une notation commode, la notation d'Einstein, permet de s'affranchir des signes  $\sum$ . L'expression de la métrique est alors la suivante :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.10)$$

De plus, nous avons vu apparaître, dans le symbole de Christoffel, le terme  $g^{\mu\nu}$ . Il se définit aisément par l'équation :

$$\delta_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} \quad (7.11)$$

Où le symbole de Kronecker  $\delta_\beta^\alpha$  est égal à 1 si  $\alpha = \beta$ , 0 dans le cas contraire.

Nous avons vu, au début de ce paragraphe, que les équations d'Einstein sont une écriture sous forme tensorielle du principe de Mach. Le terme  $G_{\mu\nu}$ , caractérisant la géométrie de l'espace-temps, est proportionnel au tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$ . Cette proportionnalité n'a comme origine que la nullité de la dérivée covariante du tenseur d'énergie-impulsion. Aussi, si nous trouvons un tenseur géométrique à dérivée covariante nulle, pouvons-nous écrire que :

$$\nabla_\alpha G_{\mu\nu} = \nabla_\alpha T_{\mu\nu} = 0 \quad (7.12)$$

Ou encore que :

$$\nabla_\alpha (G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}) = 0 \quad (7.13)$$

Nous retrouvons alors les équations d'Einstein sous forme tensorielle...

En 1928, Elie Cartan démontre que le tenseur géométrique covariant le plus général du second ordre, à dérivée covariante nulle, ne dépendant que des dérivées première et seconde de la métrique, a pour expression :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (7.14)$$

Le terme  $R_{\mu\nu}$  désigne le *tenseur de Ricci*. Il a pour expression :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \quad (7.15)$$

Le terme  $R$  est appelé *courbure riemannienne scalaire*. Il a pour expression :

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (7.16)$$

Reste maintenant à identifier la constante  $\chi$  qui égale le tenseur géométrique de Elie Cartan au tenseur d'impulsion-énergie. Pour identifier ce paramètre, nous supposons qu'il est nécessaire que la théorie de la relativité générale d'Einstein généralise la théorie newtonienne de la gravitation. L'équation de Poisson doit donc constituer un cas particulier des équations d'Einstein. Ainsi, si nous plaçons dans l'approximation d'un champ gravitationnel faible, nous devons retrouver :

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (7.17)$$

Cette limite newtonienne permet donc de fixer le paramètre  $\chi$ , identique à  $-\frac{8\pi G}{c^4}$ . Les équations d'Einstein prennent donc la forme suivante :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (7.18)$$

### 7.1.3 Un modèle de cosmologie relativiste selon Einstein

D'un point de vue historique, Einstein commença à rechercher un tenseur géométrique à dérivée covariante nulle avec pour unique but son égalisation au tenseur d'impulsion-énergie. Il découvrit ainsi, au terme d'un laborieux travail, que le tenseur géométrique suivant était à dérivée covariante nulle :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \quad (7.19)$$

Autour de 1915, le mathématicien Karl Schwarzschild donne la métrique la plus générale pour un système à symétrie sphérique :

$$ds^2 = e^{g(r,t)}c^2 dt^2 - e^{f(r,t)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2) \quad (7.20)$$

Où  $f(r, t)$  et  $g(r, t)$  sont des fonctions quelconques des coordonnées de  $r$  et de  $t$ .

Lorsque Einstein s'attaque à une description géométrique de l'univers, l'état cinématique de l'univers ne fait pour lui aucun doute : *l'univers est bel et bien statique*. De plus, l'univers demeure à symétrie sphérique. Il peut donc utiliser la métrique de Schwarzschild pour calculer le tenseur de Ricci ainsi que la courbure riemannienne scalaire. Dès lors, les fonctions  $f$  et  $g$  ne dépendent plus que de  $r$ .

Si le fluide cosmique considéré est un fluide parfait, son tenseur d'impulsion-énergie est diagonal, la coordonnée  $x^0$  s'identifie à la densité de fluide cosmique par la relation :  $x^0 = \rho c^2$ . Les trois autres coordonnées d'espace s'identifient elles aux trois composantes de la pression du fluide cosmique, qu'il suppose isotrope, par la relation :  $x^1 = x^2 = x^3 = p$ .

Les équations d'Einstein sous forme tensorielle se réduisent alors aux expressions suivantes :

$$e^{-f} \left( \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p \quad (7.21)$$

$$e^{-f} \left( \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 \quad (7.22)$$

La combinaison d'une troisième équation avec les deux précédentes permet d'obtenir la relation «thermodynamique» de l'univers. Cette équation a pour expression :

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2} (p + \rho c^2) \frac{dg}{dr} = 0 \quad (7.23)$$

Ainsi, un univers statique se satisfait de l'une des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} - \frac{dg}{dr} &= 0 \\ - p + \rho c^2 &= 0 \\ - \frac{dg}{dr} &= 0 \text{ et } p + \rho c^2 = 0 \end{aligned}$$

En plus donc d'un univers statique, Einstein suppose que la densité de l'univers  $\rho$  est constante et que la pression  $p$  du gaz cosmique est nulle. Il en résulte qu'il considère la première proposition comme la valable.

Notre première équation d'Einstein se réduit donc à l'expression suivante :

$$\left( e^{-f(r)} - 1 \right) \frac{1}{r^2} = 0 \quad (7.24)$$

Il vient immédiatement que  $f(r)$  est nulle pour tout  $r$ . Cette solution entraîne une contradiction flagrante dans la seconde équation qui possède désormais pour expression :

$$0 = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 \quad (7.25)$$

Il n'existe donc pas de solution d'univers à la fois statique, de pression nulle, et de densité constante. Pour pallier ce douloureux inconvénient, Einstein introduit un terme complémentaire dans le tenseur géométrique de ses équations. Ce terme est, bien évidemment de dérivée covariante nulle, est directement proportionnel à la métrique. Son expression est alors  $\Lambda g_{\mu\nu}$ . Le terme  $\Lambda$  représente la constante cosmologique d'Einstein.

Les équations d'Einstein sous forme tensorielle prennent ainsi la forme qu'Elie Cartan leur donnera plus de dix années plus tard, avec toute la rigueur mathématique possible.

Ainsi, si nous résolvons, toujours dans le cas d'un univers statique, à l'aide de la métrique de Schwarzschild, les équations d'Einstein suivantes :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (7.26)$$

Nous trouvons les expressions :

$$e^{-f} \left( \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} p \quad (7.27)$$

$$e^{-f} \left( \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 \quad (7.28)$$

Si nous reprenons les hypothèses prises par Einstein, nous réduisons la première expression à :

$$\Lambda = - \left( e^{-f} - 1 \right) \frac{1}{r^2} \quad (7.29)$$

Nous identifions ainsi la fonction  $f$  dépendant de  $r$  et  $\Lambda$  :

$$f(t, \Lambda) = - \ln \left( 1 - \Lambda r^2 \right) \quad (7.30)$$

Nous pouvons dès lors donner l'expression explicite de la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left( 1 - \Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (7.31)$$

Si nous remplaçons la fonction  $f(t, \Lambda)$  par son expression dans la seconde équation d'Einstein, nous trouvons une relation reliant directement la constante cosmologique à la densité :

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2} \rho \quad (7.32)$$

Il est intéressant de constater que l'expression 7.32 est très proche de l'expression 7.5 que nous avons trouvée, nécessaire pour obtenir un univers statique, dans le modèle de cosmologie newtonienne de Seeliger et Neumann.

#### 7.1.4 Un modèle de cosmologie relativiste selon De Sitter

Un autre physicien, Wilhem De Sitter, entreprend à la même époque qu'Einstein la recherche d'une équation géométrique de l'univers, en supposant, outre un univers statique, un univers vide de matière et de pression nulle.

Utilisant les équations 7.27 et 7.28, nous pouvons aisément identifier les fonctions et , dans le cas où densité et pression sont nulles, ceci à l'aide d'une méthode de variation de la constante et en supposant toutefois que la fonction  $f$  est de la forme :

$$f(r) = - \ln F(r) \quad (7.33)$$

L'équation 7.27 se réduit à :

$$\left( -\frac{1}{r} \frac{1}{F} \frac{dF}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) F + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (7.34)$$

D'où :

$$F(r) = 1 + \frac{K}{r} \quad (7.35)$$

Puis finalement :

$$f(r) = -\ln\left(1 + \frac{K}{r}\right) \quad (7.36)$$

$$g(r) = \ln\left(1 + \frac{K}{r}\right) \quad (7.37)$$

$$(7.38)$$

Aussi, la métrique de Schwarzschild devient-elle :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{K}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{K}{r}\right)^{-1} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.39)$$

Cette solution ne semble pas convenir à De Sitter. En effet, si nous identifions la constante  $K$  à  $-2GM/c^2$ , nous retrouvons la métrique d'un point-masse. Si nous supposons que cette masse est nulle, nous obtenons un espace plat, sans courbure et de dimension infinie. Convaincu, comme Einstein, de la finitude comme de la statisme de l'univers, De Sitter introduit un terme complémentaire dans son tenseur géométrique. Les équations déduites à partir de la métrique de Schwarzschild, il utilise les expressions 7.27 et 7.28 introduisant cette constante cosmologique arbitraire.

Par une démarche identique au cas sans constante cosmologique, c'est-à-dire une méthode de variation de la constante, nous pouvons identifier les fonctions  $f$  et  $g$  :

$$f(r, \Lambda) = -\ln\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \quad (7.40)$$

$$g(r, \Lambda) = \ln\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \quad (7.41)$$

Nous en déduisons ainsi une nouvelle expression de la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.42)$$

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que les parties spatiales des métriques d'Einstein et de De Sitter, dans le cas d'un univers à constante cosmologique non nulle, sont identiques, à un facteur 3 près. La comparaison s'arrête effectivement là...

### 7.1.5 Un calcul de l'énergie du vide

Calculons la densité d'énergie du vide adjointe à une particule de masse  $m$ , associée à un champ scalaire. Pour cela, nous supposons que l'énergie du vide correspond à la somme de toutes les énergies fondamentales des oscillateurs harmoniques de toutes fréquences :

$$E_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hbar}{2} \omega_i \quad (7.43)$$

Pour calculer l'énergie du vide de cette particule dans l'univers, nous allons supposer que nous calculons cette énergie dans une boîte de dimension puis nous allons faire tendre la dimension de cette boîte vers l'infini.

Transformons la somme que nous avons en une intégrale. Pour cela, nous imposons des conditions aux bords périodiques, en introduisant la longueur d'onde  $\lambda_i$ , puis le vecteur d'onde  $k_i$ , associés à la pulsation  $\omega_i$ . Ainsi, nous avons, en posant  $\lambda_i = L/n_i$ , avec  $n_i$  entier :

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi}{L}n_i \quad (7.44)$$

Puis les relations nous permettant de transformer la somme en intégrale :

$$n_i = \frac{L}{2\pi}k_i \quad \text{ainsi que} \quad \Delta n_i = \frac{L}{2\pi}dk_i \quad (7.45)$$

Ainsi, l'énergie du vide de notre particule, à une dimension, a pour expression :

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \int \frac{L}{2\pi} \omega_{k_i} dk_i \quad (7.46)$$

Ou encore, à trois dimensions :

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \int \frac{L^3}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} d^3\vec{k} \quad (7.47)$$

Ainsi, la densité d'énergie du vide prend l'expression suivante :

$$\rho_{vide} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{E_0}{L^3} = \frac{\hbar}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int \omega_{\vec{k}} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (7.48)$$

Prenons comme équation de dispersion celle correspondant à un champ scalaire :

$$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}} \quad (7.49)$$

Si nous supposons une symétrie sphérique dans notre problème,  $d^3\vec{k}$  devient :

$$d^3\vec{k} \implies 4\pi k^2 dk \quad (7.50)$$

De plus, si  $k$  est très supérieur à  $m/\hbar$ ,  $\omega_{\vec{k}}$  s'identifie à  $k$ .

Nous obtenons finalement :

$$\rho_{vide} = \frac{\hbar}{2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int \frac{k^3}{2\pi^2} dk \quad (7.51)$$

En majorant l'intégrale  $\lim_{L \rightarrow \infty} \int k^3 dk$  par  $\frac{1}{4} k_{max}^4$ , nous déduisons que :

$$\rho_{vide} = \frac{\hbar}{32\pi^3} k_{max}^4 \quad (7.52)$$

Si nous transformons ce vecteur d'onde  $k_{max}$  en une énergie  $E_{max}$  telle que  $E_{max} = \hbar k_{max}$ , nous obtenons enfin que :

$$\rho_{vide} = \frac{\pi E_{max}^4}{2\hbar^3} \quad (7.53)$$

## 7.2 Influence d'une constante cosmologique

### 7.2.1 Equation des cosmologies : une nouvelle écriture

Si nous appliquons l'équation des cosmologies aux temps quelconque et actuel, nous pouvons montrer que :

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2} \quad (7.54)$$

Posons  $a = 1/(1+z)$ . Si  $a$  varie de 0 à 1, nous balayons toute l'histoire de l'univers. En effet :

- $a = 0$  : instants primordiaux de l'univers
- $a = 1$  : instant présent

Posons maintenant  $t = \tau/H_0$ . Si  $\tau$ , nombre sans dimension, varie de 0 à 1, le temps mis par la lumière pour nous parvenir d'un objet observé varie entre 0 et  $H_0^{-1}$ , ce dernier étant l'âge de l'univers.

Exprimons  $H(t)$  dans les nouvelles unités choisies :

$$H(t) = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{1+z}{R_0} \frac{d(R_0/(1+z))}{d(\tau/H_0)} = H_0 \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \quad (7.55)$$

Ainsi, en remplaçant  $H(t)$  et  $1+z$  par leur valeur dans l'expression de l'équation des cosmologies, nous obtenons :

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = a^2 (\Omega_0 a^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2}) \quad (7.56)$$

Ou encore, sachant que  $\Omega_k = 1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda$  :

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = 1 + \Omega_0 \left(\frac{1}{a} - 1\right) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) \quad (7.57)$$

### 7.2.2 Paramètre de décélération

Le paramètre de décélération est défini à partir de la constante de Hubble. Si nous cherchons à connaître l'évolution de la constante de Hubble en fonction du temps, nous avons :

$$\frac{d}{dt} H(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right) = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} = H^2(t) \left( 1 - \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} \right) \quad (7.58)$$

Nous définissons le paramètre de décélération  $q(t)$  par :

$$q(t) = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} \quad (7.59)$$

Ainsi, en effectuant les changements de variables  $t = \tau/H_0$  et  $R(t) = a(t)R_0$ , nous avons :

– pour  $\dot{R}(t)$

$$\dot{R}(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{d(aR_0)}{d(\tau/H_0)} = H_0 R_0 \frac{da}{d\tau} \quad (7.60)$$

– pour  $\ddot{R}(t)$

$$\ddot{R}(t) = \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( H_0 R_0 \frac{da}{d\tau} \right) = H_0 R_0 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{da}{d(\tau/H_0)} \right) = H_0^2 R_0 \frac{d^2 a}{d\tau^2} \quad (7.61)$$

Alors, nous obtenons :

$$q(t) = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = -a \frac{d^2 a}{d\tau^2} \left( \frac{da}{d\tau} \right)^{-2} \quad (7.62)$$

Il nous est maintenant nécessaire d'estimer  $\frac{d^2 a}{d\tau^2}$  par une dérivation de l'équation des cosmologies.

Calculant :

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \left( \frac{da}{d\tau} \right)^2 \right] = \frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{1}{a} - 1 \right) \Omega_0 + (a^2 - 1) \Omega_\Lambda + 1 \right) \quad (7.63)$$

Nous obtenons :

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{1}{2a^2} \Omega_0 + a \Omega_\Lambda \quad (7.64)$$

Nous en déduisons enfin l'expression du paramètre de décélération  $q(t)$  :

$$q(t) = \frac{\Omega_0 - 2a^3 \Omega_\Lambda}{2[(1-a)\Omega_0 + a(a^2-1)\Omega_\Lambda + a]} \quad (7.65)$$

### 7.2.3 Temps séparant deux événements

A partir de l'équation des cosmologies aux temps actuel et quelconque, il est possible d'établir une relation entre les constantes de Hubble à ces instants quelconque et actuel. Nous avons ainsi :

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2} \quad (7.66)$$

Si nous remplaçons  $\Omega_k$  par  $1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda$ , nous obtenons :

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (7.67)$$

Il nous faut maintenant établir le temps séparant deux événements correspondant à des décalages  $z_i$  et  $z_j$ . Pour cela, nous devons rechercher la relation entre un intervalle de temps et un intervalle de décalage spectral.

La constante de Hubble est définie par :

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \quad (7.68)$$

Sachant que  $R = R_0/(1+z)$ , nous trouvons que :

$$dt = \frac{1}{H} \frac{1}{R} dR = -\frac{1}{H} \frac{1+z}{R_0} \frac{R_0 dz}{(1+z)^2} = -\frac{1}{H} \frac{dz}{1+z} \quad (7.69)$$

En intégrant membre à membre, nous obtenons l'expression suivante :

$$t_j - t_i = \frac{1}{H_0} \int_{z_i}^{z_j} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \quad (7.70)$$

### 7.3 Premiers pas vers une mesure de distances

Réécrivons l'équation des géodésiques nulles pour une métrique de Robertson-Walker :

$$\frac{dt}{R(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (7.71)$$

En prenant un signe arbitrairement négatif, puis en intégrant les expressions terme à terme entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$ , nous avons :

$$\chi = c \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \quad (7.72)$$

Cherchons maintenant à intégrer la seconde intégrale dépendant de  $k$  et  $r$ . Nous devons distinguer trois cas correspondant aux trois signes possibles de  $k$  ; les cas négatif, positif ou nul.

- Pour  $k > 0$  :

$$\chi = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^{\sqrt{k}r_1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.73)$$

ainsi :

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(\sqrt{k}r_1) \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{1}{\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}\chi)} \quad (7.74)$$

- Pour  $k = 0$  :

$$\chi = \int_0^{r_1} dr = r_1 \quad \text{ou} \quad r_1 = \chi \quad (7.75)$$

- Pour  $k < 0$  :

$$\chi = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^{\sqrt{|k|}r_1} \frac{1}{\sqrt{|k|}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.76)$$

ainsi :

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{argsinh}(\sqrt{|k|}r_1) \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{1}{\sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}\chi)} \quad (7.77)$$

En résumé, si nous cherchons  $\chi$ , nous avons :

– Pour  $k > 0$  :

$$r_1 = S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}\chi)} \quad (7.78)$$

– Pour  $k = 0$  :

$$r_1 = S_k(\chi) = \chi \quad (7.79)$$

– Pour  $k < 0$  :

$$r_1 = S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}\chi)} \quad (7.80)$$

Nous avons également :

$$\chi = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} \quad (7.81)$$

ou encore :

$$d\chi = \frac{dt}{R(t)} \quad (7.82)$$

Nous allons donc chercher à exprimer  $d\chi$  en fonction de  $dz$ .

$$\text{Comme } \frac{R_0}{R} = 1 + z, \quad R = \frac{R_0}{1+z} \quad \text{et} \quad dR = -\frac{R_0}{(1+z)^2} dz,$$

Nous en déduisons une expression de  $d\chi$  :

$$d\chi = c \frac{dR}{R\dot{R}} = -c \frac{R_0 dz}{(1+z)^2 R \dot{R}} = -c \frac{R_0 dz}{(1+z)^2 \frac{R_0}{1+z} \dot{R}} = -c \frac{dz}{R_0(1+z)} \left( \frac{R_0}{\dot{R}} \right) \quad (7.83)$$

Nous allons donc chercher à estimer le rapport  $R_0/\dot{R}$  à l'aide des équations des cosmologies.

Nous avons ainsi :

$$\frac{8\pi G}{3c^4} \rho c^2 = \frac{k}{R^2} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{\Lambda}{3} \quad (7.84)$$

Si nous appliquons cette équation au temps présent, nous obtenons :

$$\frac{8\pi G}{3c^4} \rho_0 c^2 = \frac{k}{R_0^2} + \frac{1}{c^2} H_0^2 - \frac{\Lambda}{3} \quad (7.85)$$

De plus, nous avons conservation de l'énergie totale du fluide cosmique, parfait et sans viscosité, dans un univers dominé par la matière (et non le rayonnement), où la pression est négligeable. Cette conservation se traduit par la relation :

$$\rho R^3 = \rho_0 R_0^3 \quad (7.86)$$

Estimons les différents termes de notre équation à un instant quelconque, à partir de l'instant présent, tout en introduisant les paramètres cosmologiques actuels.

Aussi avons-nous, pour chacun des termes de l'équation des cosmologies :

– d'abord :

$$\frac{8\pi G}{3c^4} \rho c^2 = \frac{8\pi G}{3c^4} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 c^2 = \frac{H_0^2}{c^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \Omega_0 \quad (7.87)$$

– puis :

$$\frac{k}{R^2} = \frac{R_0^2 H_0^2}{c^2} \frac{k c^2}{R_0^2 H_0^2} \frac{1}{R^2} = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1) \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \quad (7.88)$$

– ensuite :

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{R_0^2}{c^2} \left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right) \frac{1}{R^2} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 \quad (7.89)$$

– enfin :

$$\frac{\Lambda}{3} = \frac{H_0^2}{c^2} \frac{\Lambda}{3H_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_\Lambda \quad (7.90)$$

En reportant ces termes dans l'expression initiale, nous obtenons :

$$\frac{H_0^2}{c^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \Omega_0 = \frac{H_0^2}{c^2} (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1) \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 - \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_\Lambda \quad (7.91)$$

ou encore, plus simplement :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left( \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right) - (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1) + \Omega_\Lambda \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \right) \quad (7.92)$$

Comme  $R_0/R = 1 + z$ , l'expression de  $\dot{R}/R_0$  devient :

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right) = \pm \sqrt{\Omega_0 (1+z) - (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1) + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2}} \quad (7.93)$$

Nous en déduisons ainsi l'expression de  $d\chi$  :

$$d\chi = \frac{c}{H_0 R_0} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_0 (1+z) - (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1) + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2}}} \quad (7.94)$$

Ainsi, la *coordonnée comobile*  $r_{ij}$  entre deux objets de décalages spectraux  $z_i$  et  $z_j$  se calcule de la manière suivante :

$$r_{ij} = S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_i}^{z_j} \frac{dz}{(1+z) \sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 - (\Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (7.95)$$

où la fonction  $S_k(\chi)$  est définie par :

– Pour  $k > 0$  :

$$S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}\chi)} \quad (7.96)$$

– Pour  $k = 0$  :

$$S_k(\chi) = \chi \quad (7.97)$$

– Pour  $k < 0$  :

$$S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}\chi)} \quad (7.98)$$

### 7.3.1 Distance de mouvement propre

La distance de mouvement propre peut se définir comme le rapport entre la vitesse propre transverse de l'objet observé  $v$  et le mouvement angulaire apparent  $\omega$ .

$$d_M = \frac{v}{\omega} \quad (7.99)$$

Aussi pouvons-nous établir la relation suivante entre la distance de mouvement propre  $D_{ij}^M$  séparant deux objets de décalages spectraux  $z_i$  et  $z_j$  et la coordonnée comobile  $r_{ij}$ . Nous avons ainsi :

$$D_{ij}^M = R_0 r_{ij} \quad (7.100)$$

Si nous reprenons l'expression de  $r_{ij}$ , nous obtenons :

$$D_{ij}^M = R_0 S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_i}^{z_j} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (7.101)$$

Si nous observons un objet à un décalage spectral  $z$ , l'expression de la distance de mouvement propre  $d_M$  a pour expression :

$$d_M = R_0 S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (7.102)$$

### 7.3.2 Distance de diamètre angulaire

Lorsque nous observons un objet dans le ciel, nous pouvons mesurer la dimension angulaire de cet objet. Nous pouvons relier cette dimension angulaire  $\theta$  à une véritable dimension de l'objet observé  $D$ . La connaissance de ces deux quantités permet alors de calculer la distance-angulaire  $d_A$  nous séparant de l'objet observé :

$$d_A = \frac{D}{\theta} \quad (7.103)$$

Considérons que deux photons sont émis des extrémités de l'objet de dimension angulaire  $\theta$ . En appliquant la métrique de Robertson-Walker à chacun de ces photons, nous obtenons, supposant  $dt = 0$ ,  $dr = 0$  et  $d_\phi = 0$  :

$$ds^2 = -R^2(t)r^2 d\phi^2 \quad (7.104)$$

Si nous utilisons cette expression pour chacun des photons, l'angle  $\delta = \pm\theta/2$  étant très petit, nous avons :

- Pour le premier photon :  $\delta = -\theta/2$  et  $-D/2 = R(t)r\delta$
- Pour le second photon :  $\delta = \theta/2$  et  $D/2 = R(t)r\delta$

Nous en déduisons alors que :  $D = R(t)r\theta$

Nous avons établi précédemment une relation liant le décalage spectral au rapport des facteurs d'échelle entre un temps quelconque et le temps présent, ce qui nous permet de conclure l'expression de la distance-angulaire  $d_A$  :

$$d_A = \frac{R_0}{1+z}r \quad (7.105)$$

Aussi, en reprenant l'expression de la coordonnée comobile  $r_{ij}$  entre deux objets de décalages spectraux  $z_i$  et  $z_j$ , nous en déduisons l'expression de la distance-angulaire  $D_{ij}^A$  séparant ces objets :

$$D_{ij}^A = \frac{R_0}{1+z_j}S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_i}^{z_j} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1-\Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (7.106)$$

La distance de diamètre angulaire  $d_A$  nous séparant d'un objet de décalage spectral  $z$  est donc :

$$d_A = \frac{R_0}{1+z}S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1+z)^3 + (1-\Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (7.107)$$

### 7.3.3 Distance-luminosité

Lorsque nous observons un objet dans le ciel, nous pouvons mesurer un flux lumineux provenant de cet objet. La connaissance de son intensité intrinsèque permet de déduire la distance qui nous sépare de cet objet. Cette distance est alors la distance-luminosité.

Comme nous venons de l'évoquer, la luminosité intrinsèque  $L$  d'un objet s'exprime à partir du flux apparent  $F$  et de la distance-luminosité  $d_L$  de la manière suivante :

$$L = 4\pi d_L^2 F \quad (7.108)$$

Considérons une source, de luminosité  $L$ , émettant pendant un temps  $\Delta t_e$ , dans un angle solide  $\theta$ . L'énergie émise par cette source a pour expression :

$$E_e = \frac{\theta}{4\pi} L \Delta t_e \quad (7.109)$$

Un récepteur de surface  $S$  reçoit l'énergie provenant de cette source pendant un temps  $\Delta t_r$ , correspondant à un flux  $f$ . L'expression de l'énergie reçue est alors la suivante :

$$E_r = S f \Delta t_r \quad (7.110)$$

L'univers étant en expansion, le temps de réception  $\Delta t_r$  des photons émis pendant un temps  $\Delta t_e$  sera dilaté d'un facteur  $(1+z)$  :

$$\Delta t_r = (1+z) \Delta t_e \quad (7.111)$$

Sur ceci se greffe le fait que les photons, durant leur parcours dans cet univers en expansion, voient leur énergie divisée d'un facteur  $(1 + z)$  :

$$E_r = \frac{E_e}{1 + z} \quad (7.112)$$

De plus, l'angle solide  $\theta$  sous lequel la source voit le récepteur de surface  $S$  a pour expression une expression identique à celle que nous avons calculée lors de l'estimation de la distance-angulaire :

$$\theta = \frac{S}{(R_0 r)^2} \quad (7.113)$$

La relation entre les énergies émise et reçue nous permet ensuite d'écrire que :

$$S f \Delta t_r = \frac{1}{1 + z} \frac{1}{4\pi} \frac{S}{R_0^2 r^2} L \Delta t_e = \frac{1}{1 + z} \frac{1}{4\pi} \frac{S}{R_0^2} L \frac{\Delta t_r}{1 + z} \quad (7.114)$$

Nous pouvons donc extraire le flux apparent  $f$  de la source :

$$f = \frac{L}{4\pi R_0^2 r^2 (1 + z)^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (7.115)$$

Nous déduisons ainsi l'expression de la distance-luminosité  $d_L$  en fonction de la coordonnée comobile  $r$  :

$$d_L = R_0 r (1 + z) \quad (7.116)$$

En reprenant l'expression de la coordonnée comobile  $r_{ij}$  entre deux objets de décalages spectraux  $z_i$  et  $z_j$ , nous déduisons l'expression de la distance-luminosité  $D_{ij}^L$  séparant ces objets :

$$D_{ij}^L = R_0 (1 + z_j) S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_i}^{z_j} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1 + z)^3 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1 + z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (7.117)$$

Ainsi, si nous observons un objet à un décalage spectral, la distance luminosité a pour expression :

$$d_L = R_0 (1 + z) S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0 (1 + z)^3 + (1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda) (1 + z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right) \quad (7.118)$$

## 7.4 L'optique gravitationnelle

### 7.4.1 Potentiel projeté & Angle de déviation

Nous avons vu, dans le premier chapitre, comment espace et temps peuvent être liés par l'intermédiaire de la métrique. Dans le cas d'un champ gravitationnel  $\Phi = -GM/r$ , la métrique au voisinage de ce potentiel est la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.119)$$

Si nous nous plaçons dans le cas d'un champ gravitationnel faible, nous avons :

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.120)$$

Considérons maintenant un photon, de géodésique nulle, se déplaçant radialement. Comme  $d\theta = d\phi = ds = 0$ , nous avons :

$$0 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dr^2 \quad (7.121)$$

A l'aide de cette expression, nous pouvons calculer le temps mis par le photon pour parcourir une distance  $r$  :

$$t_{parcours} = \frac{1}{c} \int_0^r \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1} dr \quad (7.122)$$

Si nous nous limitons au premier ordre en  $\Phi$ , nous obtenons :

$$t_{parcours} = \frac{1}{c} \int_0^r \left(1 - \frac{4\Phi}{c^2}\right) dr = \frac{r}{c} - \frac{4}{c^3} \int_0^r \Phi dr \quad (7.123)$$

Parmi les deux termes du membre de gauche, le premier indique la composante purement géométrique, c'est à dire le temps mis par une particule pour parcourir une distance à la vitesse de la lumière. La seconde composante est, par contre, purement gravitationnelle.

La distance  $r$  que nous venons d'évoquer correspond, dans le cadre de notre problème, à la distance totale parcourue par le photon entre son émission et sa réception. Cette distance correspond à la somme des distances entre la source et le point d'impact sur la lentille puis entre ce point d'impact et l'observateur. Nous avons ainsi :

$$r = r_{SI} + r_{IO} = \sqrt{D_{LS}^2 + (D_{OL}\vec{\theta}_I - D_{OS}\vec{\theta}_S)^2} + \sqrt{D_{OL}^2 + (D_{OL}\vec{\theta}_I)^2} \quad (7.124)$$

Etant dans l'approximation des faibles déviations, nous en déduisons que :

$$r = D_{LS} \left(1 + \frac{1}{2D_{LS}^2} (D_{OL}\vec{\theta}_I - D_{OS}\vec{\theta}_S)^2\right) + D_{OL} \left(1 + \frac{1}{2}\vec{\theta}_I^2\right) \quad (7.125)$$

Ou, plus simplement :

$$r = D_{LS} + D_{OL} + \frac{1}{2D_{LS}} (D_{OL}\vec{\theta}_I - D_{OS}\vec{\theta}_S)^2 + \frac{1}{2}D_{OL}\vec{\theta}_I^2 \quad (7.126)$$

Il nous faut maintenant réécrire l'expression dépendant du potentiel  $\Phi$ , en introduisant la notion de potentiel projeté sur la ligne de visée. Ainsi, si nous supposons que la lentille a pour densité surfacique  $\Sigma$ , nous avons :

$$\int \Phi dr = G \int \int \Sigma(\vec{\psi}) \ln(|\vec{\psi} - \vec{\theta}_I|) d^2\vec{\psi} \quad (7.127)$$

Nous pouvons définir le potentiel projeté  $\phi(\vec{\theta}_I)$  tel que :

$$\phi(\vec{\theta}_I) = \frac{G}{D_{OL}^2} \int \int \Sigma(\vec{\psi}) \ln(|\vec{\psi} - \vec{\theta}_I|) d^2\vec{\psi} \quad (7.128)$$

De plus, le principe de moindre action nous apprend que :

$$\frac{dt}{d\vec{\theta}_I} = \vec{0} \quad (7.129)$$

En dérivant le temps de parcours  $t_{parcours}$  par rapport à  $\vec{\theta}_I$ , nous obtenons enfin que :

$$\frac{D_{OL}}{D_{LS}} (D_{OL}\vec{\theta}_I - D_{OS}\vec{\theta}_S) + D_{OL}\vec{\theta}_I - \frac{4}{c^2} \vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I} (D_{OL}^2\phi(\vec{\theta}_I)) = 0 \quad (7.130)$$

En regroupant les termes, nous obtenons :

$$\frac{D_{OS}D_{OL}}{D_{LS}} (\vec{\theta}_I - \vec{\theta}_S) = \frac{4}{c^2} D_{OL}^2 \vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I} (D_{OL}^2\phi(\vec{\theta}_I)) \quad (7.131)$$

A partir de l'équation des lentilles :

$$\vec{\theta}_I - \vec{\theta}_S = \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \vec{\alpha}(\vec{\theta}_I) \quad (7.132)$$

Nous pouvons enfin identifier l'expression de l'angle de déviation  $\vec{\alpha}(\vec{\theta}_I)$  :

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}_I) = \frac{4}{c^2} D_{OL} \vec{\nabla}_{\vec{\theta}_I} (D_{OL}^2\phi(\vec{\theta}_I)) \quad (7.133)$$

Ou encore, en fonction de la densité surfacique  $\Sigma$ , nous avons :

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}_I) = \frac{4G}{c^2 D_{OL}} \int \int \Sigma(\vec{\psi}) \frac{(\vec{\psi} - \vec{\theta}_I)}{(|\vec{\psi} - \vec{\theta}_I|)^2} d^2\vec{\psi} \quad (7.134)$$

### 7.4.2 La dispersion de vitesse comme estimateur du potentiel

Le théorème du Viriel apprend que la vitesse moyenne d'un objet associé à un cortège d'autres objets dépend, à l'équilibre, de leur masse totale et la distance moyenne séparant deux d'entre eux. Si nous avons un ensemble d'objets de masse totale  $M$ , séparés d'une distance moyenne  $\bar{r}$ , la vitesse moyenne  $\bar{v}$  observée de ces objets sera :

$$\bar{v} = \frac{GM}{2\bar{r}} \quad (7.135)$$

A partir donc de deux observables, la distance moyenne séparant les objets et leur vitesse moyenne, nous pourrions connaître la masse totale de l'ensemble des objets.

Le problème de la méthode que nous venons d'évoquer réside dans le fait que les objets considérés sont de taille ponctuelle. Une approche, à l'aide d'une fonction de distribution en vitesse, permet de rendre avec une meilleure exactitude la forme du potentiel associé à un amas. L'expression suivante établit la relation entre fonction de distribution  $f$  et densité  $\rho$  :

$$\rho = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(\vec{v}) d\vec{v} \quad (7.136)$$

De plus, l'équation de Poisson établit la relation entre le potentiel gravitationnel local et la distribution de matière :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (7.137)$$

Une équation nous fait défaut pour la résolution de ce problème. Il s'agit de l'équation liant les différents éléments que nous venons d'évoquer, et caractéristique de la dynamique du système :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f - \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (7.138)$$

Notre système sera en équilibre lorsque la fonction de distribution deviendra indépendante du temps. Alors :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \quad (7.139)$$

Si nous nous trouvons avec une source de potentiel gravitationnel à l'équilibre, à symétrie sphérique et sans rotation, l'équation de Poisson devient :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 4\pi G\rho \quad (7.140)$$

Quelques calculs permettent de parvenir à l'équation liant dispersion de vitesse locale, supposée isotrope et distribution en masse d'un amas :

$$\frac{d}{dr} (\rho\sigma^2) + \frac{\rho}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (7.141)$$

## 7.5 Utilisation originale de l'optique gravitationnelle

### 7.5.1 Anneaux d'Einstein

Considérons deux sources, de décalages spectraux différents  $z_1$  et  $z_2$ , situées sur la même ligne de visée d'un amas de galaxies de décalage spectral  $z_L$ .

Si nous appliquons l'équation des lentilles à chacune des sources, nous obtenons :

$$\theta_{I_1} - \theta_{S_1} = \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_1 \alpha(\theta_{I_1}) \quad (7.142)$$

$$\theta_{I_2} - \theta_{S_2} = \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_2 \alpha(\theta_{I_2}) \quad (7.143)$$

Si nous supposons que l'amas de galaxies constitue un potentiel en sphère isotherme singulière, l'angle de déviation  $\alpha(\theta_I)$  a pour expression :

$$\alpha(\theta_I) = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{\theta_I}{|\theta_I|} = 28.8'' \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \frac{\theta_I}{|\theta_I|} \quad (7.144)$$

Comme  $\theta_{S_1} = \theta_{S_2} = 0$ , nous déduisons l'expression de rayons d'Einstein  $r_1$  et  $r_2$  de chaque source :

$$r_1 = |\theta_{I_1}| = 28.8'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_1 \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \quad (7.145)$$

$$r_2 = |\theta_{I_2}| = 28.8'' \left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right)_2 \left( \frac{\sigma}{1000} \right)^2 \quad (7.146)$$

### 7.5.2 Evolution du rapport des distances

Nous avons vu que la mesure du décalage spectral mesuré, permettait l'estimation de différentes distances.

Ainsi, le rapport des distances, dans l'équation des lentilles désigne le rapport entre les distances séparant la lentille de la source et l'observateur de la source.

De plus, quelle que soit la définition de la distance que nous prenons, qu'il s'agisse de la distance de mouvement propre, de la distance de diamètre angulaire ou de la distance-luminosité, le rapport des distances demeure toujours :

$$\left( \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \right) = \frac{S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_{z_L}^{z_S} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right)}{S_k \left( \frac{c}{H_0 R_0} \int_0^{z_S} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1-\Omega_0-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \right)} \quad (7.147)$$

où la fonction  $S_k(\chi)$  est définie en fonction des valeurs possibles de  $k$ .

Aussi, nous avons :

– Pour  $k > 0$  :

$$S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k} \sin(\sqrt{k}\chi)} \quad (7.148)$$

– Pour  $k = 0$  :

$$S_k(\chi) = \chi \quad (7.149)$$

– Pour  $k < 0$  :

$$S_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|k|} \sinh(\sqrt{|k|}\chi)} \quad (7.150)$$

Si nous nous plaçons dans les hypothèses suivantes :

– un univers de courbure nulle :  $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$  et  $k = 0$

– deux sources aux décalages spectraux suivants :  $z_1 = 1$  et  $z_2 = 2$

– une lentille située au décalage spectral :  $z_L = 0.5$

Nous pouvons d'ores et déjà réécrire le rapport des distances sous la forme simplifiée suivante :

$$\left(\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\right) = \frac{\int_{z_L}^{z_S} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}}{\int_0^{z_S} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}} \quad (7.151)$$

Afin d'illustrer la variation du rapport des distances en fonction d'une densité croissante du vide, traçons (Figure 7.1) ce rapport en fonction d'une densité du vide comprise entre une valeur nulle et l'unité, pour les deux sources citées précédemment.

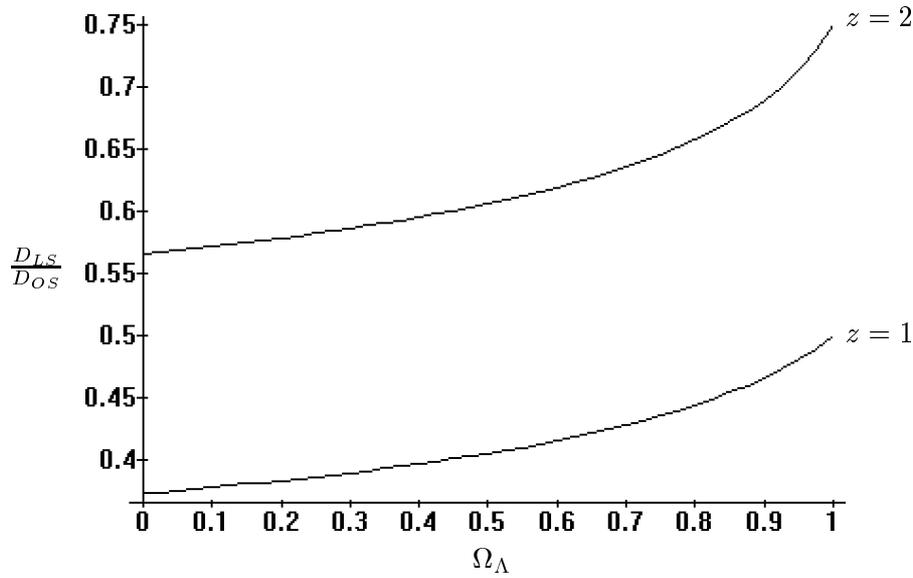


FIG. 7.1 – **Evolution du rapport de distances** : pour un univers de courbure nulle

Nous pouvons ainsi remarquer que le rapport des distances est une fonction croissante d'une densité croissante du vide.

Il serait également intéressant d'étudier, pour deux cosmologies opposées - l'une à densité de matière dominante et l'autre à densité de vide dominante - comment évolue ce rapport des distances pour un décalage spectral croissant de la source, la lentille demeurant à un décalage spectral raisonnable, comparable à celui que l'on mesure avec précision des amas comportant des arcs, c'est à dire avec  $z_L = 0.5$ .

Nous représentons (figure 7.2) donc graphiquement l'évolution du rapport des distances pour un décalage spectral d'une source croissant, dans le cas des deux cosmologies suivantes :

-  $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (1.0)$  : univers dominé par la densité de matière

- $(\Omega_0, \Omega_\Lambda) = (0.1, 0.9)$  : univers dominé par la densité du vide

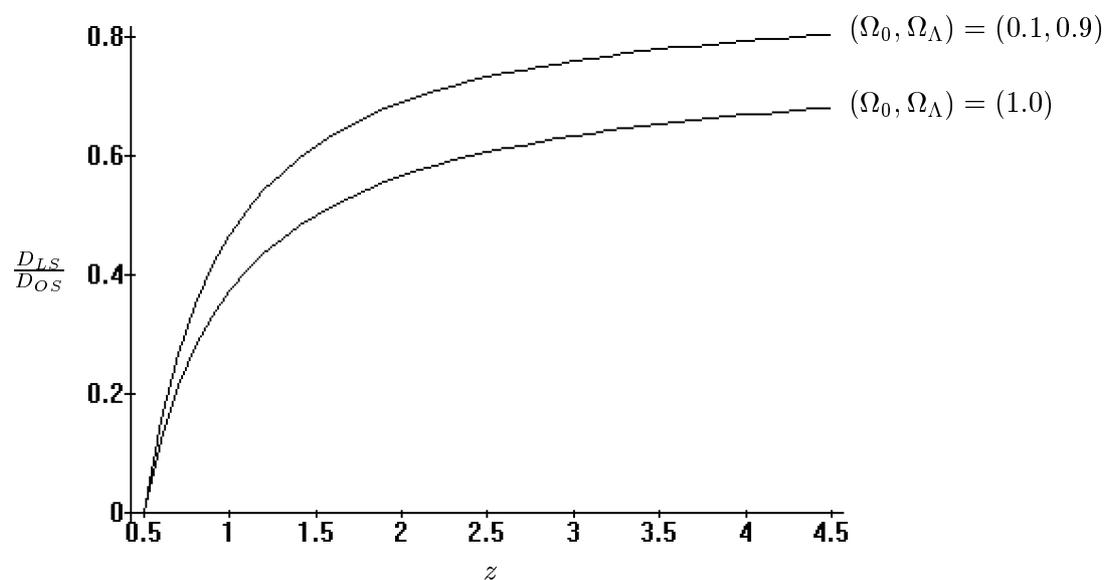


FIG. 7.2 – **Evolution du rapport de distances** : pour un univers de courbure nulle

Nous remarquons ainsi que, pour des décalages spectraux assez élevés, nous avons une différence très notable du rapport des distances.



# Chapitre 8

## Outils Utilisés

Deux outils principaux permirent à ce rapport de se réaliser :

Le premier est un logiciel de calcul mathématique, Maple V, version étudiante, distribué par Springer-Verlag. Il permit les calculs puis le tracé de chacune des courbes illustrant ce rapport.

Le document originel était réalisé sous un système d'exploitation avec un traitement de texte dont je tairai le nom. Le manque de professionnalisme des ces deux produits informatiques m'a incité à passer de longues heures pour transcrire ce document en format  $\text{\LaTeX}$ , utilisant le système d'exploitation Linux.