

LES LENTILLES GRAVITATIONNELLES

TRAVAIL

réalisé par Emmanuel QUEMENER

Projet personnel
entrant dans le cadre de l'unité de valeur de maîtrise UM 6

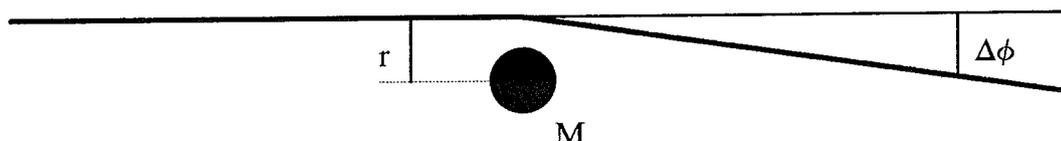
Directeurs de projet : Pierre-Yves Longaretti (Observatoire de Grenoble)
Yannick Mellier (Observatoire de Midi-Pyrénées de Toulouse)

Responsable de l'unité : Jacques Gélard (Université Paul Sabatier de Toulouse)

II. DOMAINES DE TRAVAIL

Avant de poursuivre plus loin notre étude , il est nécessaire de situer dans quels domaines d'application se placera notre simulation et quel sera le contexte physique correspondant .

Par un calcul élémentaire de relativité générale , on parvient à l'expression de la déviation au voisinage d'une masse ponctuelle .



Cette déviation $\Delta\phi$ s'exprime en fonction de la masse de l'objet M , de la distance de plus courte approche r , de la constante de gravitation G et de la vitesse de la lumière dans le vide c :

$$\Delta\phi = - \frac{4GM}{rc^2}$$

Dans le cas du Soleil , pour un rayon lumineux rasant la surface du Soleil (d'un rayon de 700.000 km et d'une masse de 2.10^{30} kg) , l'angle de déviation est de $8,42 \cdot 10^{-6}$ radians ou 1,75 secondes d'arc .

Il est alors nécessaire de quitter cette échelle , tant au niveau des distances (quelques centaines de milliers de kilomètres) qu'au niveau des masses (une masse solaire) occasionnant cette déviation des rayons lumineux que nous venons d'évoquer .

Préoccupons-nous d'abord des distances .

1) Approximation des lentilles minces

Dans l'exemple que nous donnions pour le Soleil , la distance de plus courte approche était de l'ordre de quelques centaines de milliers de kilomètres . Bien que cette distance soit très grande comparée à l'échelle de l'homme et ses activités , cette échelle , en astrophysique , et a fortiori en cosmologie , est extrêmement petite .

Nous allons donc grimper d'un cran dans l'échelle de l'univers , pour parvenir aux ordres de grandeur des éléments caractérisant les mirages gravitationnels observés depuis une dizaine d'années .

L'objet dont nous observerons la déflexion gravitationnelle de ses rayons sera , comme l'objet produisant cette déflexion , situé à des distances avoisinant les dimensions de l'univers observable , c'est à dire de l'ordre du milliard d'années-lumière à la dizaine de milliards d'années-lumière .

L'unité " année-lumière " est très peu employé en astrophysique ; on lui préfère généralement le " parsec " , unité issue des premiers calculs des distances nous séparant des étoiles les plus proches (dont la définition est développée en annexe) . Le parsec représente une distance de 3,26 années-lumière . Nous parlerons donc en termes de Gigaparsec (Gpc) pour les distances nous séparant des objets observés et en Kiloparsec (Kpc) pour les distances de plus courte approche des photons .

Donnons maintenant la nature et la disposition spatiale des objets qui vont nous intéresser .

Les objets dont nous observons les mirages gravitationnels sont soit des galaxies , soit des quasars . Les galaxies sont des ensembles de plusieurs centaines voire plusieurs milliers de milliards d'étoiles ; les quasars sont des noyaux de galaxies très actifs , libérant une énergie comparable à celle d'une galaxie , mais de dimensions stellaires (quelques éléments complémentaires sont disponibles en annexe) .

Les objets qui produisent ces mirages sont des galaxies , regroupées en amas , dont la dimension caractéristique est de l'ordre du Mégaparsec (Mpc) .

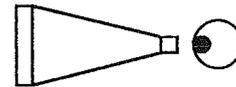
Dans notre simulation , nous considérerons la structure générale suivante :



objet



lentille



observateur

La lentille aura donc une dimension de l'ordre du Mégaparsec .

Les distances objet-lentille et lentille-observateur seront de l'ordre du Gigaparsec .

Les distances caractéristiques entre les divers éléments objet-lentille-observateur sont donc environ mille fois supérieure à l'épaisseur de la lentille . Nous allons donc pouvoir utiliser l'approximation des lentilles minces dans notre simulation .

Cette approximation consiste à ne pas se préoccuper de l'infléchissement de la trajectoire à l'intérieur de la lentille mais à considérer que le photon arrive suivant une direction déterminée en arrière de la lentille , et part suivant une autre direction en avant de la lentille .

En optique géométrique , si nous appliquons les lois de Snell-Descartes , nous utilisons cette approximation ; la trajectoire du rayon lumineux à l'intérieur même de la lentille ne nous intéresse pas , seule nous intéresse la déviation occasionnée par la lentille .

2) Milieu transparent

Nous supposons de plus que les photons défléchis par la lentille ne sont en aucun cas absorbés par les objets la composant . La lentille est donc considérée comme transparente vis à vis des photons la traversant .

3) Champs gravitationnels faibles et stationnaires

A la force gravitationnelle introduite par Isaac Newton fut introduit le concept de champ , avec les développements du calcul infinitésimal . Ainsi la masse centrale créait un champ gravitationnel ; il était donc fonction de cette masse . De ce champ se déduisait la force gravitationnelle , fonction de la masse des deux objets . La relation entre le champ et la force n'était qu'une simple différentielle . De ce fait , plus le champ gravitationnel évoluait rapidement , plus la force gravitationnelle tendant à rapprocher les deux corps était grande .

Le champ de gravitation déduit de la force d'attraction gravitationnelle est fonction de la masse de l'objet M , de la distance au centre de masse de cet objet r et de la constante de gravitation G .

Soit ϕ ce champ de gravitation :
$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

Ce champ de gravitation étant directement proportionnel à la répartition de masse , il est nécessaire d'estimer les masses mises en jeu dans ce type de phénomène que constitue l'effet de lentille gravitationnelle .

Les galaxies étant des ensembles de centaines voire des milliers de milliards d'étoiles , la masse caractéristique d'une galaxie sera de l'ordre de plusieurs centaines de milliards de masses solaires . Mais la matière stellaire (contractée sous forme d'étoiles) ne constitue pas la totalité de la masse ; les nuages de gaz , les systèmes planétaires à l'intérieur même des galaxies , le halo entourant les galaxies ont une contribution non négligeable à leur masse .

De plus , il a été observé que les arcs gravitationnels possèdent une étendue supérieure à celle résultant de simulations , compte tenu des estimations de masse .

L'introduction de matière noire permet néanmoins de lever ce paradoxe , en surévaluant la masse des galaxies et des amas de galaxies , et de un à deux ordres de grandeur doivent être introduits pour satisfaire les observations expérimentales .

Nous utiliserons , dans notre simulation , une unité égale à 10^{12} masses solaires pour la masse des galaxies , lesquelles seront d'ailleurs regroupées en amas .

Si nous incluons le potentiel énoncé plus haut dans les termes de la métrique définissant l'espace-temps , il est de l'ordre de 10^{-7} . Nous pourrions donc utiliser sans problème l'hypothèse des champs faibles dans notre étude .

De même , les champs mis en jeu dans les processus de lentille gravitationnelle évoluent au cours du temps , mais les temps d'observation sont très petits comparés aux temps nécessaires au champ de gravité pour se modifier de manière significative (ceci même si les galaxies formant la lentille donc la source de gravité sont en chute libre les unes sur les autres). Les paramètres de la lentille n'évoluent ainsi quasiment pas à l'échelle temporelle de l'homme .

De ce fait , nous pourrions considérer que les champs mis en jeu dans les processus de lentille gravitationnelle sont à la fois petits et stationnaires .

4) Angles de déviation petits

Nous avons vu que nous pouvions nous placer dans l'approximation des champs faibles . Ces champs faibles définissent la métrique donc la forme de l'espace-temps dans lequel va évoluer le photon au cours de son déplacement . La relativité générale , par son principe de moindre action , démontre que l'angle de déviation est directement relié au terme de gravitation introduit dans la métrique , et qu'il est , de plus , quantitativement du même ordre . Comme nous avons vu que ce terme de la métrique est de l'ordre de 10^{-7} , l'angle de déviation occasionné par une distribution de masses qui joue le rôle de lentille gravitationnelle , sera alors d'environ 10^{-7} radians . Les angles de déviation seront donc de l'ordre de la seconde d'arc voire parfois de plusieurs dizaines de secondes d'arc .

5) Espace euclidien

A l'intérieur même du principe d'équivalence il est possible de découvrir que l'univers d'après Einstein est courbe . Ce résultat est à la base de tous les tests classiques de la relativité générale . La matière contenue dans un espace-temps courbe l'espace-temps dans lequel se trouve cette matière .

Edwin Hubble a montré , dans les années 1930 , que l'univers était en expansion . Ses successeurs se sont alors chargés de courber cet univers en perpétuelle évolution . L'univers , à grandes dimensions , est donc courbe , et l'objet que nous voyons n'est pas nécessairement dans la direction (en ligne droite) d'observation , même en visée directe .

L'espace dans lequel nous nous plaçons dans notre simulation est euclidien , où les trois dimensions hauteur , largeur et profondeur forment un trièdre direct . L'objet dont nous observons les mirages gravitationnels est exactement dans la direction de la lentille , ceci en ligne droite et non en géodésique comme c'est généralement le cas dans un espace courbe .

6) Potentiel sphérique

Lors de son calcul historique de la déviation d'un rayon lumineux au voisinage du Soleil , Albert Einstein , retrouvant la limite newtonienne , utilisa comme expression de son champ de gravitation un champ en $1/r$.

Or ce champ ne s'applique à merveille que dans le cas du Soleil , en réalité , très peu de corps célestes possèdent des caractéristiques analogues ; un trou noir , par exemple , est la seule illustration parfaite d'un champ en $1/r$ (à condition que le rayon lumineux croise le trou noir à une distance telle que l'approximation des champs faibles reste applicable) .

Il est alors possible de définir un champ à symétrie sphérique (comme le champ newtonien) , qui tend vers zéro à l'infini , mais qui ne diverge pas pour une distance au centre de masse nulle .

L'astuce la plus simple consiste à considérer que cet objet possède un rayon de coeur avec lequel le champ sera maximal à une distance d du centre de masse .

$$\text{L'expression } \Phi = \frac{GM}{r} \text{ devient alors } \Phi = GM \frac{r}{r^2 + d^2} .$$

Pour r identique à d , le champ Φ devient identique à $\Phi = \frac{GM}{2d^2}$

Pour r identique à 0 , le champ Φ est nul.

7) Conclusion

Nous avons donc vu dans les paragraphes précédents que cet effet de lentille gravitationnelle a besoin de certaines approximations pour permettre une approche synthétique du phénomène ; rappelons-les avant d'aborder la méthode qui va effectivement nous permettre de modéliser ces mirages :

- approximation des lentilles minces
- milieu transparent
- champs gravitationnels faibles et stationnaires
- angles de déviation petits
- espace euclidien

III. MODELISATION DU PHENOMENE

1) Algorithme de calcul

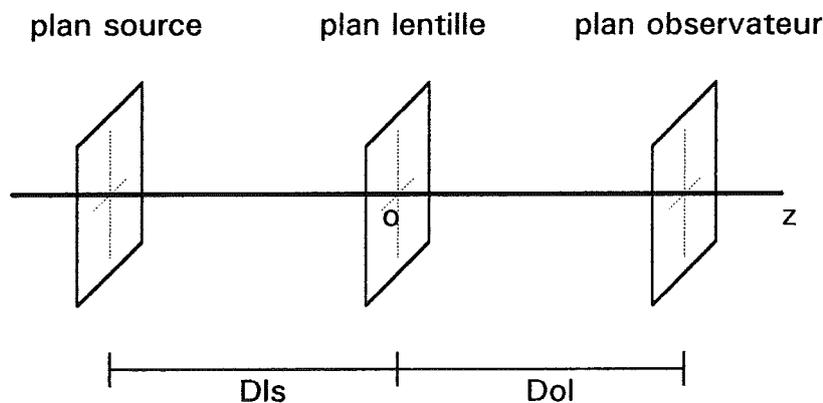
Avant d'aborder les éléments mathématiques qui vont nous être nécessaires pour notre simulation, donnons d'ores et déjà la méthode générale que nous allons employer dans notre modélisation.

Cet algorithme se compose de quatre étapes :

- détermination de l'incidence des photons venant de la source en un point du plan lentille
- calcul de la direction de sortie des photons après la lentille
- test vérifiant si oui ou non le photon dévié arrive en direction de l'observateur
- si ce test est positif, une nouvelle source virtuelle est définie dans le plan source.

Une fois ces quatre étapes réalisées, il suffit d'afficher les images de ces sources virtuelles puis d'y superposer l'image de l'amas de galaxies, c'est à dire le plan lentille.

Voici le plan général que nous vous proposons de suivre. L'origine du repère cartésien que nous utiliserons sera le centre du plan lentille et la direction générale de propagation des photons se produira du plan source vers le plan observateur, c'est à dire dans la direction des z positifs.



2) Eléments mathématiques

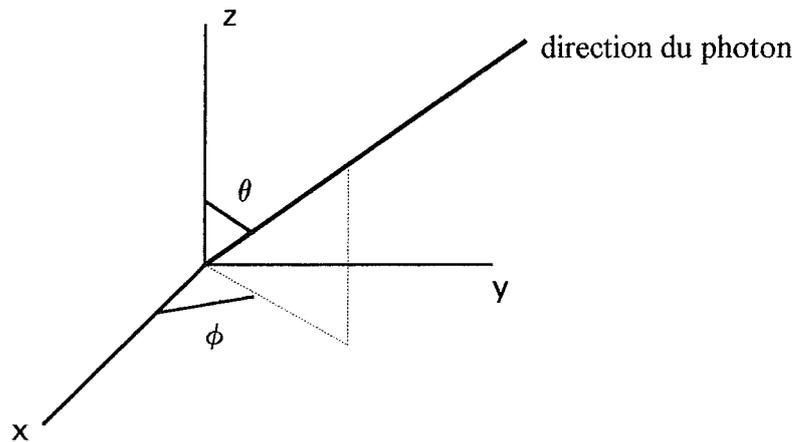
Le premier élément de notre étude va consister à choisir une manière de représenter une direction, celle du photon au cours de son déplacement.

La première manière qui vient à l'esprit pour représenter une direction est une méthode vectorielle; nous pouvons associer cette direction à un vecteur possédant trois composantes suivant les trois directions de notre espace.

Cette manière possède beaucoup d'inconvénients, à commencer par le fait qu'elle est très lourde à mettre en oeuvre et que, de plus, elle n'utilise aucune des approximations que nous avons énoncées au paragraphe précédent.

L'autre méthode , que nous emploierons , consiste à se placer en coordonnées sphériques . Là , notre direction n'a besoin que de deux paramètres , des paramètres angulaires, pour être définie . Cette direction est également associée à un vecteur en coordonnées sphériques , mais le seul paramètre nouveau qui apparaît est la longueur du vecteur dont nous n'aurons aucune utilité .

Ainsi , les directions d'arrivée et de départ avant et après la lentille seront définies par deux paramètres θ et ϕ .



Tout d'abord , avant un quelconque calcul concernant notre problème , intéressons-nous au changement de coordonnées d'un repère sphérique vers un repère cartésien et réciproquement .

Nous pouvons définir un repère en coordonnées sphériques où \vec{e}_r est la direction de notre photon . Dans ce repère , nous pouvons également définir deux autres vecteurs \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ qui forment un trièdre direct et sont alors perpendiculaires deux à deux .

Considérons un vecteur unitaire \vec{e}_r ; nous pouvons déterminer ses coordonnées cartésiennes x , y et z connaissant les angles θ et ϕ ; nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi \sin \theta \\ y &= \sin \phi \sin \theta \\ z &= \cos \theta \end{aligned}$$

Ce qui donne , si nous exprimons \vec{e}_r en fonction \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z :

$$\vec{e}_r = \cos \phi \sin \theta \vec{e}_x + \sin \phi \sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z$$

De même , nous pouvons également déduire que , pour \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ , nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= \cos \phi \cos \theta \vec{e}_x + \sin \phi \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{aligned}$$

Il nous est alors possible de définir une matrice de changement de base dans laquelle un vecteur en coordonnées sphériques pourra s'exprimer dans une base cartésienne par un simple produit matriciel :

$$\begin{array}{ccc} \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{array}$$

Cette matrice de changement de base est unitaire . Sa matrice transposée sera donc égale à sa matrice inverse .

Nous pouvons donc exprimer les vecteurs de la base cartésienne \bar{e}_x , \bar{e}_y et \bar{e}_z en fonction des vecteurs \bar{e}_r , \bar{e}_θ et \bar{e}_ϕ de la base sphérique :

$$\begin{aligned} \bar{e}_x &= \cos \phi \sin \theta \bar{e}_r + \cos \phi \cos \theta \bar{e}_\theta - \sin \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_y &= \sin \phi \sin \theta \bar{e}_r + \sin \phi \cos \theta \bar{e}_\theta + \cos \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_z &= \cos \theta \bar{e}_r - \sin \theta \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

Etant placés dans l'approximation des faibles déviations , nous pouvons dire que l'angle θ est très petit devant 1 . Il est alors possible d'effectuer un développement au premier ordre pour la fonction sinus et au deuxième ordre pour la fonction cosinus .

Ainsi , $\sin \theta$ est à remplacer par θ et $\cos \theta$ est à remplacer par $1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Nous obtenons alors , dans la base sphérique :

$$\begin{aligned} \bar{e}_r &= \theta \cos \phi \bar{e}_x + \theta \sin \phi \bar{e}_y + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \bar{e}_z \\ \bar{e}_\theta &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi \bar{e}_x + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi \bar{e}_y - \theta \bar{e}_z \\ \bar{e}_\phi &= -\sin \phi \bar{e}_x + \cos \phi \bar{e}_y \end{aligned}$$

De même , dans la base cartésienne , nous obtenons également :

$$\begin{aligned} \bar{e}_x &= \theta \cos \phi \bar{e}_r + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi \bar{e}_\theta - \sin \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_y &= \theta \sin \phi \bar{e}_r + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi \bar{e}_\theta + \cos \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_z &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \bar{e}_r - \sin \theta \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

- **Calcul des deux angles définissant la trajectoire du rayon incident sur la lentille**

Cherchons maintenant à parvenir à l'expression de ces deux paramètres θ et ϕ , pour le rayon arrivant de la source sur la lentille , connaissant les coordonnées de la source dans le plan source , la distance de plus courte approche dans le plan lentille ainsi que la distance séparant la lentille de la source .

Soient x_s et y_s les coordonnées de la source dans le plan source .

Soient x_L et y_L les coordonnées du point de plus courte approche dans le plan lentille .

Soit d_{LS} , la distance séparant le plan source du plan lentille .

Comme nous nous plaçons dans l'approximation des angles faibles , l'angle θ définissant l'angle entre la direction z , est petit . Nous avons :

$$x_L - x_s = r \cos \phi \sin \theta \quad (1)$$

$$y_L - y_s = r \sin \phi \sin \theta \quad (2)$$

$$d_{LS} = r \cos \theta \quad (3)$$

Le terme r représente la norme du vecteur partant du point S du plan source arrivant au point L du plan lentille : $r = \sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2 + d_{LS}^2}$

En divisant (2) par (1) , nous obtenons : $\frac{y_L - y_s}{x_L - x_s} = \frac{r \cos \phi \sin \theta}{r \sin \phi \sin \theta} = \tan \phi$

De même , nous pouvons déduire une expression de θ , en élevant les lignes (1) et (2) au carré puis en effectuant la somme :

$$(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2 = r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta$$

Ce qui donne pour θ , θ étant compris entre 0° et 90° :

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2 + d_{LS}^2}}$$

A ce stade , nous pouvons utiliser le fait que l'angle θ est petit devant 1 donc prendre un développement limité au premier ordre pour sin . Egalement , la distance séparant les deux plans source et lentille d_{LS} est petite devant les coordonnées des points du plan source et du plan lentille mis en jeu . En première approximation , la norme du vecteur r sera identique à la distance d_{LS} .

Nous en déduisons une nouvelle expression pour θ :

$$\theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{d_{LS}}$$

En définitive , les deux paramètres angulaires θ et ϕ définissant la direction d'incidence du photon sur le plan lentille pourront se calculer à l'aide des expressions suivantes :

$$\theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{d_{LS}}$$

$$\tan \phi = \frac{y_L - y_s}{x_L - x_s}$$

- **Calcul des nouveaux paramètres angulaires après la déflexion due à la lentille**

Afin de parvenir à trouver une solution analytique des angles de déviation du photon après sa déviation à travers le plan de la lentille, nous devons nous placer dans le plan défini par le vecteur donnant la direction du photon et le vecteur allant du point de plus courte approche L au point G définissant la galaxie.

L'angle de déviation sera noté $\Delta\phi$ et son expression sera :

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2} \frac{r}{r^2 + r_C^2}$$

où

- r est égal à : $r = \sqrt{(x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2}$
- r_C est le rayon de coeur

Nous devons également définir un angle α , paramètre du vecteur situé dans le plan lentille, reliant le point L au point G.

Pour ce vecteur, nous avons : $\vec{LG} = (x_G - x_L)\vec{e}_x + (y_G - y_L)\vec{e}_y = r(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$

Nous avons donc : $\alpha = \arctan \frac{y_G - y_L}{x_G - x_L}$

Si nous appelons \vec{e}_r' le vecteur désignant la direction du photon après sa déflexion, nous aurons :

$$\vec{e}_r' = \cos\Delta\phi\vec{e}_r + \sin\Delta\phi \frac{\vec{LG}}{LG}$$

Déterminons les coordonnées de \vec{LG} en coordonnées sphériques :

$$\vec{LG} = r(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$$

$$\begin{aligned} \vec{LG} &= r(\cos\alpha\cos\phi\sin\theta + \sin\alpha\sin\phi\sin\theta)\vec{e}_r \\ &\quad + r(\cos\alpha\cos\phi\cos\theta + \sin\alpha\sin\phi\cos\theta)\vec{e}_\theta \\ &\quad + r(-\cos\alpha\sin\phi + \sin\alpha\cos\phi)\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\vec{LG} = r[\cos(\alpha - \phi)(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta) + \sin(\alpha - \phi)\vec{e}_\phi]$$

Effectuons le produit scalaire du vecteur \vec{LG} suivant le vecteur \vec{e}_r ; nous avons :

$$\vec{LG} \cdot \vec{e}_r = r\cos(\alpha - \phi)\sin\theta = LL'$$

Ainsi , nous avons : $\vec{L}G = LL' \vec{e}_r + L' G$

Nous pouvons donc déduire que : $\vec{L} G = r \cos(\alpha - \phi) \cos \theta \vec{e}_\theta + r \sin(\alpha - \phi) \vec{e}_\phi$

Ainsi que sa norme vaut : $L' G = r \sqrt{\cos^2(\alpha - \phi) \cos^2 \theta + \sin^2(\alpha - \phi)}$

En supposant que l'angle θ est petit devant 1 , nous avons , pour $L' G$:

$$L' G = r \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^2 \cos^2(\alpha - \phi) + \sin^2(\alpha - \phi)} = r \sqrt{(1 - \theta^2) \cos^2(\alpha - \phi) + \sin^2(\alpha - \phi)}$$

$$L' G = r \sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}$$

De même , avec les mêmes approximations , nous avons , pour $\vec{L} G$:

$$\vec{L} G = r \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \vec{e}_\theta + r \sin(\alpha - \phi) \vec{e}_\phi$$

Or , nous avons vu que : $\vec{e}_r' = \cos \Delta\phi \vec{e}_r + \sin \Delta\phi \frac{\vec{L} G}{L' G}$

Comme nous nous plaçons dans le cas des faibles déviations , l'angle $\Delta\phi$ est très petit devant 1 ; nous avons donc en première approximation :

$$\vec{e}_r' = \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \vec{e}_r + \Delta\phi \frac{\vec{L} G}{L' G}$$

Il nous reste maintenant à repasser en coordonnées cartésiennes , en nous limitant au deuxième ordre pour les angles petits .

Une fois en coordonnées cartésiennes , nous pourrons procéder par identification pour revenir aux angles donnant la direction à la sortie de la lentille .

Remplaçons \vec{e}_r , \vec{e}_ϕ et \vec{e}_θ par leur expression en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r' = & \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \cos \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi - \sin(\alpha - \phi) \sin \phi \right] \right\} \vec{e}_x \\ & + \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \sin \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi - \sin(\alpha - \phi) \cos \phi \right] \right\} \vec{e}_y \\ & + \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[-\theta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \right] \right\} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Le vecteur \vec{e}'_r a pour expression en coordonnées cartésiennes , en fonction des angles θ' et ϕ' de sortie , définissant la trajectoire :

$$\vec{e}'_r = \theta' \cos \phi' \vec{e}_x + \theta' \sin \phi' \vec{e}_y + \left(1 - \frac{\theta'^2}{2}\right) \vec{e}_z$$

En procédant par identification , nous avons :

$$1 - \frac{\theta'^2}{2} = \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[-\theta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \right] \right\} \vec{e}_z$$

Mais encore , en nous limitant au second ordre :

$$1 - \frac{\theta'^2}{2} = \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}\right) + \Delta\phi \left[1 + \frac{1}{2} \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi) \right] \left[-\theta \cos(\alpha - \phi) \right] \right\}$$

Nous obtenons alors , au second ordre : $1 - \frac{\theta'^2}{2} = 1 - \frac{\Delta\phi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} + \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)$

Nous déduisons enfin l'expression de θ' , fonction de $\Delta\phi$ et θ :

$$\theta' = \sqrt{\Delta\phi^2 + \theta^2 + 2 \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)}$$

De même , nous avons :

$$\theta' \cos \phi' = \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \cos \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi - \sin(\alpha - \phi) \sin \phi \right]$$

Ainsi que :

$$\theta' \sin \phi' = \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \sin \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi - \sin(\alpha - \phi) \cos \phi \right]$$

En nous limitant au second ordre , nous obtenons :

$$\theta' \cos \phi' = \theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \cos \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]$$

$$\theta' \sin \phi' = \theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \sin \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \sin \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]$$

En divisant la seconde expression par la première , nous obtenons :

$$\tan \phi' = \frac{\theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \sin \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \sin \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]}{\theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \cos \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]}$$

En définitive , les angles θ' et ϕ' définissant la trajectoire du photon après sa déviation par la lentille seront donc les suivants :

$$\theta' = \sqrt{\Delta\phi^2 + \theta^2 + 2 \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)}$$

$$\phi' = \arctan \frac{\theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\sin \phi - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}{\theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}$$

• Test vérifiant si le photon arrive en direction de l'observateur

Rien ne servirait de connaître la direction du photon après sa déviation s'il nous était impossible de l'observer . Nous serons donc amenés à connaître la position du photon dans le plan observateur , c'est à dire les coordonnées qu'aurait ce photon une fois la distance lentille-observateur parcourue .

Nous avons vu que les coordonnées d'un vecteur en coordonnées cartésiennes , à partir de ses coordonnées sphériques , c'est à dire les deux angles θ et ϕ ainsi que la norme de ce vecteur r , sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Si nous considérons que le photon part dans la direction définie par les deux angles θ' et ϕ' après sa déviation due à la lentille , que son point de départ du plan lentille est de coordonnées x_L et y_L , et que , enfin , le plan observateur se trouve à une distance d_{OL} du plan lentille , nous aurons , en prenant x_O et y_O comme coordonnées d'impact du photon dans le plan observateur :

$$x_O = x_L + r \cos \phi' \sin \theta' \quad (1)$$

$$y_O = y_L + r \sin \phi' \sin \theta' \quad (2)$$

$$d_{OL} = r \cos \theta' \quad (3)$$

A partir de l'expression (3) , nous pouvons déduire une expression connue de r :

$$r = \frac{d_{OL}}{\cos \theta'}$$

Ce qui nous permet de trouver une expression de x_o et y_o en fonction des paramètres connus :

$$\begin{aligned}x_o &= x_L + d_{oL} \cos \phi' \tan \theta' \\y_o &= y_L + d_{oL} \sin \phi' \tan \theta'\end{aligned}$$

Comme nous nous sommes placés dans l'approximation des faibles déviations , l'angle θ' est très petit devant 1 . Nous pouvons donc en première approximation , remplacer le terme $\tan \theta'$ par θ' . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}x_o &= x_L + d_{oL} \theta' \cos \phi' \\y_o &= y_L + d_{oL} \theta' \sin \phi'\end{aligned}$$

Pour que le photon parvienne à l'observateur , il faut en théorie que le point d'impact des photons dans le plan observateur soit confondu avec l'origine .

En pratique , nous considérerons que le photon parvient à l'observateur si $\sqrt{x_o^2 + y_o^2}$ est inférieur à une certaine valeur .

Les conditions pour que le photon parvienne à l'observateur sont les suivantes :

$$\begin{aligned}x_o &= x_L + d_{oL} \theta' \cos \phi' && \text{avec } x_o = 0 \\y_o &= y_L + d_{oL} \theta' \sin \phi' && \text{avec } y_o = 0\end{aligned}$$

• Détermination de la position de la source virtuelle dans le plan source

Maintenant que nous sommes certains que le photon parvient à l'observateur , cherchons les coordonnées de la source virtuelle dans le plan source .

Nous avons vu que les coordonnées d'un vecteur en coordonnées cartésiennes , à partir de ses coordonnées sphériques , c'est à dire les deux angles θ et ϕ ainsi que la norme de ce vecteur r , sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \sin \theta \\y &= r \sin \phi \sin \theta \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Si nous considérons que le photon part dans la direction définie par les deux angles θ' et ϕ' après sa déviation due à la lentille , que son point de départ du plan lentille avait pour coordonnées x_L et y_L , et que , enfin , le plan source se trouve à une distance d_{LS} du plan lentille , nous aurons , en prenant x_s' et y_s' comme coordonnées de la source virtuelle dans le plan source :

$$\begin{aligned}x_s' &= x_L + r \cos \phi' \sin \theta' && (1) \\y_s' &= y_L + r \sin \phi' \sin \theta' && (2) \\-d_{LS} &= r \cos \theta' && (3)\end{aligned}$$

A partir de l'expression (3), nous pouvons déduire une expression connue de r :

$$r = \frac{-d_{LS}}{\cos \theta'}$$

Nous pouvons alors déduire, θ' étant petit, les coordonnées de la source virtuelle, dans le plan source :

$$\begin{aligned} x_s' &= x_L - d_{LS} \theta' \cos \phi' \\ y_s' &= y_L - d_{LS} \theta' \sin \phi' \end{aligned}$$

Algorithme principal de détermination des sources virtuelles

- détermination de l'incidence des photons venant de la source en un point du plan lentille

$$\theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{d_{LS}}$$

$$\tan \phi = \frac{y_L - y_s}{x_L - x_s}$$

- calcul de la direction de sortie des photons après la lentille

$$\theta' = \sqrt{\Delta\phi^2 + \theta^2 + 2 \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)}$$

$$\phi' = \arctan \frac{\theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\sin \phi - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}{\theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}$$

- test vérifiant si oui ou non le photon dévié arrive en direction de l'observateur

$$\begin{aligned} x_o &= x_L + d_{OL} \theta' \cos \phi' && \text{avec } x_o = 0 \\ y_o &= y_L + d_{OL} \theta' \sin \phi' && \text{avec } y_o = 0 \end{aligned}$$

- si ce test est positif, une nouvelle source virtuelle est définie dans le plan source

$$\begin{aligned} x_s' &= x_L - d_{LS} \theta' \cos \phi' \\ y_s' &= y_L - d_{LS} \theta' \sin \phi' \end{aligned}$$

3) Eléments de la modélisation

Une fois ces quelques calculs préliminaires effectués, penchons-nous maintenant sur la méthodologie que nous allons utiliser pour calculer puis afficher les sources virtuelles, donc les mirages gravitationnels.

Nous avons déjà dit dans le premier chapitre que les sources seront considérées comme ponctuelles ; une source étendue sera donc composée d'un certain nombre de sources ponctuelles . Chacune de ces sources va créer son propre mirage gravitationnel et la superposition de tous les mirages donnera le mirage gravitationnel de la source étendue .

La lentille , étant un amas , sera composée d'un ensemble de sources de potentiel gravitationnel , les galaxies . Chaque source de potentiel ne donnera pas , comme précédemment , un ensemble de mirages , mais contribuera à la déviation de chacun des photons venant de la source .

Ainsi , par exemple , considérons le cas d'un amas composé de deux galaxies . Le photon arrivant dans la direction de la source est dévié par la première galaxie ; nous en déduisons une nouvelle direction de propagation . Nous prenons cette nouvelle direction comme direction d'incidence en avant de la lentille ; la seconde galaxie donne alors une troisième direction de propagation , celle du photon après la lentille .

Ce processus peut alors se généraliser à un nombre de galaxies quelconque ...

Il faudra donc , dans notre programme de simulation , introduire une boucle afin de pouvoir déterminer la direction de propagation après la lentille , connaissant uniquement le paramètre d'impact (la distance de plus approche des galaxies , que nous définirons) et les données relatives aux sources .

Comment maintenant connaître les endroits du plan lentille où les photons incidents iront dans notre direction d'observation après déviation de la lentille ?

Ne connaissant pas à priori ces endroits , sauf dans des cas extrêmement simples , nous allons devoir " balayer " le plan lentille de manière judicieuse afin de déterminer les paramètres d'impact qui nous intéressent , et d'où émergeront les photons qui iront dans notre direction d'observation .

La méthode de balayage la plus classique , mais pas nécessairement la plus fine , serait de prendre un quadrillage sur le plan lentille et d'effectuer le calcul en chacun des points de la maille . Cette méthode possède l'avantage d'être particulièrement simple à programmer mais ne convient pas à notre problème .

Notre choix va plutôt se porter sur une méthode plus astucieuse . Nous allons quitter ce balayage systématique carré pour nous orienter vers un balayage en spirale à pas constant .

Ce type de procédé possède les avantages suivants : tout d'abord , dans les simulations que nous allons effectuer , les galaxies et les sources seront presque quasiment alignées dans la direction d'observation .

En partant de l'origine , nous pourrons observer rapidement les mirages qui sont généralement très proches de la galaxie défectrice , et sont enfouis dans la lumière émise par la galaxie .

D'autre part , comme les éléments de la lentille sont à symétrie sphérique , il est plus judicieux de choisir un balayage circulaire , dont la distance à l'origine variera linéairement ; les arcs qui nous observerons se formeront quasiment d'un bout à l'autre , alors qu'un balayage carré ne permettra pas cet avantage .

Cette méthode de balayage par une spirale à pas constant possède de nombreux avantages . Malheureusement , si nous désirons une certaine précision sur la position des mirages gravitationnels , la durée de simulation sera très longue . Ainsi , nous n'obtiendrons un résultat acceptable que si le pas d'itération de la spirale est très fin .

Une autre méthode , combinée à la précédente , va néanmoins nous permettre de parvenir rapidement au résultat escompté : nous allons repérer par un pas grossier la position virtuelle de bons paramètres d'impact , et , par une méthode d'interpolation très élémentaire , nous allons redéfinir de nouveaux paramètres d'impact , dont la rapide convergence va nous assurer une bonne précision sur la position des mirages gravitationnels .

Nous avons vu au paragraphe précédent que les coordonnées dans le plan observateur d'un photon dévié par la lentille étaient données par :

$$\begin{aligned}x_O &= x_L + d_{OL} \theta' \cos \phi' \\y_O &= y_L + d_{OL} \theta' \sin \phi'\end{aligned}$$

Considérons deux points , représentant l'impact de deux photons provenant d'une même source , dont chacun a été dévié par la lentille pour un paramètre d'impact différent . Nous avons :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{L1} + d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' & \text{ainsi que :} & & x_2 &= x_{L2} + d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' \\y_1 &= y_{L1} + d_{OL} \theta_1' \sin \phi_1' & & & y_2 &= y_{L2} + d_{OL} \theta_2' \sin \phi_2'\end{aligned}$$

A partir de ces deux points , nous allons rechercher un nouveau paramètre d'impact ; ce paramètre d'impact sera déterminé grâce à une interpolation linéaire .

Nous recherchons donc les paramètres liés à deux droites , une pour chacune des coordonnées x et y : $x_L = a x_O + b$ et $y_L = c y_O + d$.

Comme nous recherchons x_L et y_L pour que le photon arrive à l'origine dans le plan observateur , nous prenons : $x_L = b$ et $y_L = d$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}x_{L1} &= x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' & \text{et} & & x_{L1} &= a x_1 + b \\x_{L2} &= x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' & \text{et} & & x_{L2} &= a x_2 + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{En identifiant les termes :} & & x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' &= a x_1 + b \\ & & x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' &= a x_2 + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ou encore :} & & x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' - b &= a x_1 \\ & & x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' - b &= a x_2\end{aligned}$$

En divisant la première ligne par la seconde , nous obtenons :

$$\frac{x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' - b}{x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' - b} = \frac{x_1}{x_2}$$

En développant l'expression , nous parvenons à l'expression suivante :

$$x_1 x_2 - d_{OL} \theta_1' x_2 \cos \phi_1' - b x_2 = x_1 x_2 - d_{OL} \theta_2' x_1 \cos \phi_2' - b x_1$$

Ce qui nous permet de conclure que : $d_{OL} (\theta_1' x_2 \cos \phi_1' - \theta_2' x_1 \cos \phi_2') = b(x_1 - x_2)$

Alors , comme $x_L = b$, nous aurons :

$$x_L = \frac{d_{OL}(\theta_1' x_2 \cos \phi_1' - \theta_2' x_1 \cos \phi_2')}{x_1 - x_2}$$

En effectuant exactement le même raisonnement pour d , nous obtenons :

$$y_L = \frac{d_{OL}(\theta_1' y_2 \sin \phi_1' - \theta_2' y_1 \sin \phi_2')}{y_1 - y_2}$$

Si les paramètres d'impact des deux photons 1 et 2 ne sont pas trop éloignés , nous nous rapprocherons de l'origine dans le plan observateur ; nous gagnerons donc en précision sur la position des mirages gravitationnels .

Il suffira en outre de refaire ce calcul plusieurs fois , en gardant toujours la valeur calculée de l'impact dans le plan observateur , mais aussi la précédente , ce qui nous permettra de nous rapprocher par itérations du résultat idéal .

Quand les photons défléchis arriveront dans la direction de l'observateur à une erreur que nous fixerons , ils seront visibles et nous serons alors en mesure de les afficher sur l'écran graphique .

IV. DESCRIPTION DU PROGRAMME

1) Description synthétique du programme

Le programme , réalisation pratique de la simulation détaillée au paragraphe précédent , se compose de diverses parties . Nous en dénombrerons quatre , que nous citerons dans l'ordre d'exécution de ces procédures par le calculateur :

- Saisie des différents paramètres liés à la simulation
- Simulation proprement dite
- Affichage de la vue observationnelle théorique

Dans un premier paragraphe , nous allons évoquer les différents paramètres que nous aurons à définir , ainsi que certains rappels concernant les ordres de grandeurs de ces paramètres .

Dans le deuxième paragraphe , nous décrirons l'algorithme de calcul en utilisant les éléments que nous avons démontrés dans le chapitre précédent .

Dans le troisième et dernier paragraphe , nous donnerons des explications sur ce qui est affiché à l'écran , sur ce qu'il faut lire ou comprendre .

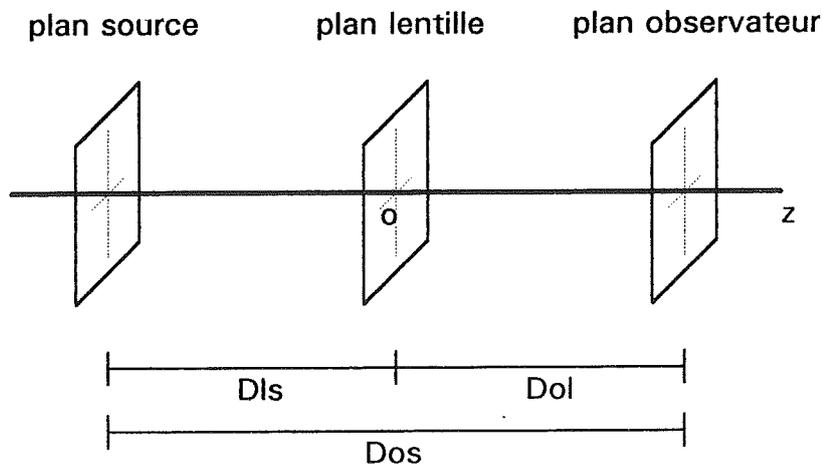
2) Saisie des paramètres

Dans notre chapitre concernant les domaines d'applications physiques , nous avons énoncé un certain nombre de données qu'il nous fallait définir pour configurer le système .

Nous allons donc décrire ces différents paramètres que nous aurons à introduire dans le calculateur pour que le programme fonctionne dans de bonnes conditions .

• Saisie des distances

Les premiers paramètres que nous aurons à définir sont les distances entre les différents plans source , lentille , observateur .



Les paramètres à définir sont au nombre de deux . Il nous faudra ainsi définir :

- la distance observateur-source D_s
- la distance observateur-lentille D_l

La distance lentille-source sera déterminée par une simple soustraction dans le programme , il n'était donc pas nécessaire d'introduire la saisie de cette donnée .

Généralement , en astrophysique , la distance nous séparant des objets est donnée sous forme de décalage spectral .

Edwin Hubble a montré que les objets , au-delà d'une certaine distance , s'éloignaient d'autant plus vite l'un de l'autre que les distances les séparant étaient grandes . La relation entre les deux paramètres distance et vitesse d'éloignement est un simple facteur de proportionnalité appelé la constante de Hubble .

Ce décalage spectral , c'est à dire le déplacement vers le rouge des raies émises par les objets , est dû à l'effet Doppler .

Il n'est alors pas rare d'exprimer ces distances directement sous forme d'un terme z , z étant justement le décalage spectral dont nous parlons.

Nous pourrions donc , le cas échéant , modifier le programme et demander l'introduction de décalages spectraux , qui nous permettra par une simple opération , de parvenir à la distance nous séparant de chacun des objets .

Quand l'utilisateur cherche à entrer ses distances , nous lui proposons des distances variant entre 0.5 et 5 Gigaparsecs , c'est à dire entre 1.6 et 16 milliards d'années-lumière .

Jusqu'à maintenant , les mirages gravitationnels observés étaient distants du milliard d'années-lumière ; nous donnons alors un éventail assez large des distances , de cet ordre .

• Saisie des paramètres liés au plan source

Le plan source est tout d'abord défini par une dimension que nous devons imposer . Cette dimension nous sera nécessaire lors de l'affichage des mirages gravitationnels , à la fin de l'exécution du programme .

Nous proposons pour le plan source une valeur comprise entre 0.5 et 5 Mégaparsecs , c'est à dire des distances avoisinant le million d'années-lumière .

Ces distances sont généralement celles constatées dans les amas de galaxies . La galaxie la plus proche de notre galaxie , la Voie Lactée , visible à l'oeil nu est la galaxie d'Andromède ; elle se trouve à une distance de deux millions d'années-lumière .

Ensuite , il est demandé d'introduire le nombre de sources ponctuelles situées dans ce plan , ainsi que leurs coordonnées respectives en Kiloparsecs et leur intensité (une valeur comprise entre 1 et 10) .

• Saisie des paramètres liés au plan lentille

Il est tout d'abord demandé quelles sont les dimensions du plan lentille . Nous proposons à l'utilisateur une valeur calculée de manière à ce que les contours du plan source coïncident avec les contours du plan lentille , lors de l'affichage sur l'écran de la configuration qu'observerait effectivement l'observateur sur Terre .

Exprimons maintenant les différents termes r et q .

Le terme r , distance de l'origine au point, aura pour expression : $r = p \left(n + \frac{a}{2\pi} \right)$

Le terme q , avancement angulaire, aura pour expression : $q = \frac{2\pi}{2\pi n + a}$

A chaque itération, nous incrémenterons la valeur de t et de q .

Ainsi, lorsque l'angle t sera supérieur ou égal à 2π , nous poserons t égal à zéro et nous incrémenterons le paramètre n présent dans les expressions de r et q .

• Calcul des coordonnées du photon dans le plan observateur

Il suffit ici d'appliquer l'algorithme présenté dans le chapitre évoquant l'approche théorique du phénomène :

- détermination de l'incidence des photons venant de la source en un point du plan lentille
- calcul de la direction de sortie des photons après la lentille
- calcul des coordonnées du photon dévié dans le plan observateur

Nous avons vu que cet algorithme pouvait être développé comme suit :

- détermination de l'incidence des photons venant de la source en un point du plan lentille

$$\theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{d_{LS}}$$

$$\tan \phi = \frac{y_L - y_s}{x_L - x_s}$$

- calcul de la direction de sortie des photons après la lentille

$$\theta' = \sqrt{\Delta\phi^2 + \theta^2 + 2 \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)}$$

$$\phi' = \arctan \frac{\theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\sin \phi - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}{\theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}$$

- calcul des coordonnées du photon dans le plan observateur

$$x_O = x_L + d_{OL} \theta' \cos \phi'$$

$$y_O = y_L + d_{OL} \theta' \sin \phi'$$

Une fois les coordonnées x_0 et y_0 calculées, nous pouvons rechercher si la norme d'un vecteur de coordonnée (x_0, y_0) est inférieure à une certaine valeur, que nous prendrons 2 fois égale au paramètre p évoqué précédemment.

Si cette norme est bien inférieure à $2p$, nous pouvons alors lancer l'algorithme de convergence.

- **Algorithme de convergence**

Cet algorithme de convergence se compose de deux parties.

La première partie consiste à rechercher les coordonnées d'un autre point, pour un paramètre d'impact dans le plan lentille peu différent de celui utilisé dans la partie précédente.

La seconde partie est une boucle qui va rechercher par itérations successives la position idéale du paramètre d'impact pour que le photon dévié arrive en direction de l'observateur, avec une précision donnée.

La première partie est identique à celle qui vient d'être évoquée. Il suffit de modifier le paramètre d'impact de manière raisonnable. Nous garderons donc l'angle t que nous avons pour le calcul précédent, puis nous ajouterons à r , la distance du point de la spirale à l'origine, la valeur p .

La seconde partie utilise une boucle limitée par deux paramètres. Lorsque l'un de ces deux paramètres satisfait sa propre condition, nous pourrions alors sortir de la boucle.

Le premier concerne le nombre maximal d'itérations; au-delà d'un certain nombre d'itérations, l'algorithme de convergence est un échec. Nous sortons donc de la boucle.

Le second concerne la précision de convergence; quand le photon a pénétré dans le domaine désigné comme étant le point de vue de l'observateur, alors l'algorithme de convergence est un succès.

A l'aide des deux couples de coordonnées dans le plan observateur que nous avons gardés, nous déterminons par interpolation linéaire un nouveau paramètre d'impact. A ce nouveau paramètre d'impact est associé un nouveau couple de coordonnées dans le plan observateur; ce nouveau couple est utilisé avec le moins ancien pour redéterminer un nouveau paramètre d'impact. Au bout de quelques itérations, nous nous rapprochons du paramètre d'impact idéal.

- **Affichage de la source virtuelle**

Si l'algorithme de convergence est couronné de succès, nous savons que le paramètre d'impact dernièrement calculé et la direction après déviation qui lui est associé sont bons.

Nous pouvons alors déterminer la position de cette source virtuelle dans le plan source.

Grâce aux coordonnées de cette source virtuelle, nous sommes en mesure de calculer simplement ce que verrait l'observateur, situé à l'origine dans le plan d'observation.

3) Visualisation des mirages gravitationnels

Nous avons abordé, dans le paragraphe précédent, le thème de l'affichage d'une source virtuelle, connaissant ses coordonnées dans le plan source.

Nous n'allons pas stocker dans un tableau les coordonnées de chacun des points formant une source virtuelle . Notre choix va alors plutôt se porter sur un affichage direct de ces sources , lorsque le calcul montre que la déviation résultant de leur paramètre d'impact envoie ces photons en direction de l'observateur .

Ainsi , nous verrons évoluer le paramètre d'impact sur le plan lentille , ramené au plan d'observation , décrivant une spirale . Simultanément , quand le calcul montrera que nous sommes dans un domaine susceptible de produire des mirages gravitationnels en direction de l'observateur , nous verrons s'afficher les sources virtuelles correspondant à ces mirages .

4) Renseignements relatifs au programme

Le programme de simulation , en premier lieu , demande certains éléments nécessaires à la modélisation , que nous avons évoqué dans la première partie de ce chapitre .

Ensuite , une fois ces données introduites , l'écran de simulation apparaît ; il se compose de différents éléments comme l'écran donnant la vision de l'observateur , quelques données relatives à la simulation (les distances objet-source D_{os} et objet-lentille D_{ol} , le nombre de points sources N_s dans le plan source et le nombre de galaxies N_g dans le plan lentille) et un encadré en bas de l'écran donnant quelques indications sur le déroulement de la simulation .

Sur cet écran de simulation apparaît tout d'abord la vision de l'observateur , si nous ne tenons pas compte de la déflexion gravitationnelle .

Les sources sont sous forme de points .

Les galaxies sont représentées par un ensemble de dégradés de couleurs , dont l'intensité décroît vers les bords . Rappelons qu'il était demandé dans la définition des paramètres d'introduire les dimensions des galaxies .

Nous supposons ici que l'intensité à la forme d'une courbe gaussienne , dans les deux dimensions , d'où l'impression de dégradé .

Notons que la dimension de la galaxie représente la demi-largeur ou la demi-hauteur au centre pour laquelle l'intensité est égale au dixième de l'intensité au centre .

Ensuite , la simulation s'effectue . Nous voyons évoluer le paramètre d'impact dans le plan lentille . Quand un mirage gravitationnel en direction de l'observateur est détecté , il s'affiche sur l'écran .

Un décompte permet de visualiser le pourcentage restant à effectuer de notre simulation .

Quand la simulation est terminée , les galaxies sont superposées aux mirages gravitationnels , ce qui permet , finalement , d'obtenir la vision d'un observateur situé à l'origine dans le plan d'observation .

Notre simulation s'achève par l'affichage sur l'écran graphique du résultat issu des paramètres initiaux que nous avons introduits .

Ensuite , il est demandé le nombre de galaxies présentes dans la lentille , leurs coordonnées respectives , leurs dimensions , la dimension de leurs rayons de coeur en Kiloparsecs , puis leurs masses en Téra-masses solaires (milliers de milliards de masses solaires) , et enfin leurs intensités respectives (une valeur comprise entre 1 et 10) .

- **Saisie des paramètres liés à l'observateur et à la simulation**

Il est demandé d'introduire les dimensions angulaires de la fenêtre d'observation de l'astronome . Nous donnons à l'utilisateur une proposition où tout le plan source défini est visible sur cette fenêtre d'observation .

Il est également demandé d'introduire le nombre de pas que la spirale va effectuer pour couvrir la totalité du plan lentille . Plus le nombre de pas sera grand , meilleure sera la précision dans la recherche des mirages gravitationnels .

3) Boucle principale de la simulation et éléments

Dressons maintenant un inventaire des éléments qui nous seront nécessaires pour effectuer notre simulation dans de bonnes conditions .

- balayage du plan lentille suivant les points d'une spirale à pas constant .
- calcul des coordonnées du photon dans le plan observateur après déviation .
- si ces coordonnées sont proches de l'origine , démarrage de l'algorithme de convergence .
- si les dernières coordonnées sont très proches de l'origine , affichage du point .

- **Balayage du plan lentille suivant les points d'une spirale à pas constant**

Comme nous l'avons dit au paragraphe précédent , notre choix de balayage du plan lentille s'est porté sur une méthode échantillonnant les points sur une spirale à pas constant .

Nous allons donc déterminer deux coordonnées cartésiennes x et y situées sur une courbe paramétrique représentant une spirale .

Le cercle , en coordonnées paramétriques , a pour expression , pour t allant de 0 à 2π :

$$\begin{aligned}x &= r \cos t \\y &= r \sin t\end{aligned}$$

Notre spirale aura une expression en coordonnées paramétriques identique , avec un rayon r fonction de la variable t .

Nous appelons p le pas , c'est à dire l'avancement de r au bout de 2π .

Comme nous voulons échantillonner pour des longueurs d'arc de rayon constantes pendant le balayage de la courbe , égales au pas p , l'angle d'itération deviendra de plus en plus petit au fur et à mesure que r augmentera .

Si l'angle augmente d'une valeur q à chaque itération , nous devons introduire un paramètre supplémentaire n qui comptera le nombre de tours déjà effectué .

```

program deflexion_gravitationnelle_copyright_mai_1993_Emmanuel_Quemener;
{$e+}

uses crt,graph;

type vecteur=array[1..20] of real;

var graphpilote,graphmode,xc,yc:integer;

function atan(y,x,ep:real):real;

  var a:real;

begin
  if abs(x)<ep then if abs(y)=y then a:=pi/2
                    else a:=3*pi/2
                    else if abs(x)=x then a:=arctan(y/x)
                    else a:=arctan(y/x)+pi;

  atan:=a;
end;

function sign(x:real):integer;

  var s:integer;

begin
  if abs(x)=x then s:=1
                else s:=-1;

  sign:=s;
end;

function cint(x:real):integer;

var y:integer;

begin
  if frac(abs(x))>0.5 then y:=trunc(x)+sign(x)
                        else y:=trunc(x);

  cint:=y;
end;

procedure calcul_angles(var xg,yg,rg,mg:vecteur;
                        var xl,yl,te,pe,ep:real;
                        var j:integer);

var de,al,nm,dm,ts,ps,rl:real;

begin
  rl:=sqrt(sqr(xg[j]-xl)+sqr(yg[j]-yl));
  de:=2e-7*mg[j]*rl/(sqr(rl)+sqr(rg[j]));
  al:=atan(yg[j]-yl,xg[j]-xl,ep);
  ts:=sqrt(sqr(de)+sqr(te)+2*de*te*cos(al-pe));
  nm:=te*sin(pe)+de*(sin(al)-sqr(te)*cos(al-pe)*(sin(pe)-sin(al)*cos(al-pe)/2));
  dm:=te*cos(pe)+de*(cos(al)-sqr(te)*cos(al-pe)*(cos(pe)-cos(al)*cos(al-pe)/2));
  ps:=atan(nm,dm,ep);

```

```
te:=ts;
pe:=ps;
end;
```

```
procedure saisie_chaine(var chaine:string;i,j:integer);
```

```
var ch:string;
```

```
begin
  if chaine<>' ' then
    begin
      outtextxy(i,j,chaine);
      i:=i+textwidth(chaine)-8;
    end;
  ch:=' ';
  repeat
    chaine:=chaine+ch;
    outtextxy(i,j,ch);
    ch:=readkey;
    i:=i+8;
  until ch=chr(13);
end;
```

```
procedure distances(var dos,dol,dls:real);
```

```
var i,j,k:integer;
var chaine,ch:string;
```

```
begin
  repeat
    bar(1,465,638,478);
    chaine:='Saisie de la distance observateur-source Dos en gigaparsecs ( de 0
    i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
    outtextxy(i,468,chaine);
    repeat
      bar(113,70,527,78);
      chaine:='Dos=';
      i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
      outtextxy(i,70,chaine);
      i:=i+24;
      j:=70;
      chaine:=' ';
      saisie_chaine(chaine,i,j);
      val(chaine,dos,i);
    until ((dos<=5) and (dos>=0.5));
    bar(1,465,638,478);
    chaine:='Saisie de la distance observateur-lentille Dol en gigaparsecs ( de
    i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
    outtextxy(i,468,chaine);
    repeat
      bar(321,102,527,110);
      chaine:='Dol=';
      i:=trunc(abs(424-textwidth(chaine)/2));
      outtextxy(i,102,chaine);
      i:=i+24;
      j:=102;
      k:=10;
      chaine:=' ';
```

```

    saisie_chaine(chaine,i,j);
    val(chaine,dol,i);
until ((dol<=5) and (dol>=0.5) and (dol<=dos));
bar(1,465,638,478);
chaine:='Voulez-vous modifier une de ces données (o/n) ?';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,468,chaine);
chaine:=readkey;
until ((chaine='n') or (chaine='N') or (chaine=chr(13)));
bar(1,465,638,478);
chaine:='La distance lentille-source Dls se calcule automatiquement';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,468,chaine);
dls:=dos-dol;
bar(113,70,527,78);
str(dos:0:2,chaine);
chaine:='Dos='+chaine+' Gpc';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,70,chaine);
bar(113,102,527,110);
str(dol:0:2,chaine);
chaine:='Dol='+chaine+' Gpc';
i:=trunc(abs(434-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,102,chaine);
bar(113,102,319,110);
str(dls:0:2,chaine);
chaine:='Dls='+chaine+' Gpc';
i:=trunc(abs(216-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,102,chaine);
dos:=dos*1e6;
dol:=dol*1e6;
dls:=dls*1e6;
end;

```

```

procedure source(var xs,ys,is:vecteur;var ns:integer;var ds:real);

```

```

var i,j,k,l,m:integer;
var chaine,ch:string;

```

```

begin

```

```

  repeat

```

```

    bar(0,270,639,463);

```

```

    bar(1,465,638,478);

```

```

    chaine:='Saisie des paramètres liés au plan source';

```

```

    i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));

```

```

    outtextxy(i,468,chaine);

```

```

    setcolor(11);

```

```

    rectangle(31,287,193,449);

```

```

    line(31,280,193,280);

```

```

    line(31,278,31,282);

```

```

    line(193,278,193,282);

```

```

    line(200,287,200,449);

```

```

    line(198,287,202,287);

```

```

    line(198,449,202,449);

```

```

    line(112,304,112,432);

```

```

    line(48,368,176,368);

```

```

    outtextxy(176,370,'x');

```

```

    outtextxy(104,296,'y');

```

```

    chaine:='Dimensions ( de 0.5 à 5 Mpc )   :';

```

```

i:=trunc(240+textwidth(chaine));
j:=320;
outtextxy(240,j,chaine);
repeat
  bar(i,j,639,j+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,i,j);
  val(chaine,ds,k);
until ((ds<=5) and (ds>=0.5));
str(ds:0:2,chaine);
chaine:=chaine+' Mpc';
i:=trunc(abs(112-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,270,chaine);
chaine:='Nombre de sources ( de 1 à 20 ) :';
i:=trunc(240+textwidth(chaine));
j:=j+16;
outtextxy(240,j,chaine);
repeat
  bar(i,j,639,j+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,i,j);
  val(chaine,ns,k);
until ((ns<=20) and (ns>=1));
setcolor(15);
bar(1,465,638,478);
chaine:='Saisie des paramètres de chacune des sources';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,468,chaine);
k:=j+16;
for i:=1 to ns do
  begin
    setcolor(11);
    bar(240,k,639,k+7);
    str(i,chaine);
    if i=1 then chaine:=chaine+'-ière' else chaine:=chaine+'-ième';
    chaine:='Paramètres de la '+chaine+' source :';
    outtextxy(240,k,chaine);
    chaine:='coordonnée en x ( en Kpc ) :';
    j:=280+textwidth(chaine);
    k:=k+16;
    bar(j,k,639,k+72);
    outtextxy(280,k,chaine);
    repeat
      bar(j,k,639,k+7);
      chaine:='';
      saisie_chaine(chaine,j,k);
      val(chaine,xs[i],l);
    until ((abs(xs[i])<=500*ds) and (l=0));
    chaine:='coordonnée en y ( en Kpc ) :';
    k:=k+16;
    outtextxy(280,k,chaine);
    repeat
      bar(j,k,639,k+7);
      chaine:='';
      saisie_chaine(chaine,j,k);
      val(chaine,ys[i],l);
    until ((abs(ys[i])<=500*ds) and (l=0));
    chaine:='intensité ( de 1 à 10 ) :';
    k:=k+16;
    outtextxy(280,k,chaine);
  end

```

```

repeat
  bar(j,k,639,k+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,j,k);
  val(chaine,is[i],l);
  until ((is[i]>=1) and (is[i]<=10));
  l:=109+trunc(xs[i]/ds*0.16);
  m:=365-trunc(ys[i]/ds*0.16);
  setcolor(trunc(is[i]));
  outtextxy(l,m,'S');
  k:=k-48;
end;
bar(1,465,638,478);
setcolor(15);
chaine:='Voulez-vous modifier une de ces données (o/n) ?';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,468,chaine);
chaine:=readkey;
until ((chaine='n') or (chaine='N') or (chaine=chr(13)));
end;

```

```

procedure lentille(var xg,yg,ig,rg,lg,hg,mg:vecteur;
                  var ng:integer;
                  var dos,dol,ds,dl:real);

```

```

var i,j,k,l,m:integer;
var chaine,ch:string;

```

```

begin

```

```

  repeat

```

```

    setcolor(15);
    bar(0,270,639,463);
    bar(1,465,638,478);
    chaine:='Saisie des paramètres liés au plan lentille';
    i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
    outtextxy(i,468,chaine);
    setcolor(12);
    rectangle(31,287,193,449);
    line(31,280,193,280);
    line(31,278,31,282);
    line(193,278,193,282);
    line(200,287,200,449);
    line(198,287,202,287);
    line(198,449,202,449);
    line(112,304,112,432);
    line(48,368,176,368);
    outtextxy(176,370,'x');
    outtextxy(104,296,'y');
    chaine:='Dimensions ( de 0.5 à 5 Mpc )      : ';
    i:=trunc(240+textwidth(chaine));
    dl:=dol/dos*ds;
    str(dl:0:2,ch);
    chaine:=chaine+ch;
    j:=288;
    outtextxy(240,j,chaine);
    chaine:=readkey;
    if chaine=chr(13) then chaine:=ch
      else

```

```

      begin

```

```

repeat
  bar(i,j,639,j+7);
  saisie_chaine(chaine,i,j);
  val(chaine,d1,l);
  chaine:='';
  until ((d1<=5) and (d1>=0.5));
end;
str(d1:0:2,chaine);
chaine:=chaine+' Mpc';
i:=trunc(abs(112-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,270,chaine);
chaine:='Nombre de galaxies ( de 1 à 20 ) :';
i:=trunc(240+textwidth(chaine));
j:=j+16;
outtextxy(240,j,chaine);
repeat
  bar(i,j,639,j+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,i,j);
  val(chaine,ng,k);
  until ((ng<=20) and (ng>=1));
  setcolor(15);
  bar(1,465,638,478);
  chaine:='Saisie des paramètres de chacune des galaxies';
  i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
  outtextxy(i,468,chaine);
  k:=j+16;
  for i:=1 to ng do
    begin
      setcolor(12);
      bar(240,k,639,k+7);
      str(i,chaine);
      if i=1 then chaine:=chaine+'-ière' else chaine:=chaine+'-ième';
      chaine:='Paramètres de la '+chaine+' galaxie : ';
      outtextxy(240,k,chaine);
      chaine:='coordonnée en x ( en Kpc ) :';
      j:=272+textwidth(chaine);
      k:=k+16;
      bar(j,k,639,k+111);
      outtextxy(272,k,chaine);
      repeat
        bar(j,k,639,k+7);
        chaine:='';
        saisie_chaine(chaine,j,k);
        val(chaine,xg[i],l);
        until ((abs(xg[i])<=500*d1) and (l=0));
        chaine:='coordonnée en y ( en Kpc ) :';
        k:=k+16;
        outtextxy(272,k,chaine);
        repeat
          bar(j,k,639,k+7);
          chaine:='';
          saisie_chaine(chaine,j,k);
          val(chaine,yg[i],l);
          until ((abs(yg[i])<=500*d1) and (l=0));
          chaine:='intensité ( de 1 à 10 ) :';
          k:=k+16;
          outtextxy(272,k,chaine);
        repeat
          bar(j,k,639,k+7);

```

```

    chaine:='';
    saisie_chaine(chaine,j,k);
    val(chaine,ig[i],l);
until ((ig[i]>=1) and (ig[i]<=10));
str((dl*100):0:0,ch);
chaine:='largeur ( de 10 à 100 Kpc ) :';
k:=k+16;
outtextxy(272,k,chaine);
repeat
  bar(j,k,639,k+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,j,k);
  val(chaine,lg[i],l);
until ((lg[i]>=10) and (lg[i]<=100));
chaine:='hauteur ( de 10 à 100 Kpc ) :';
k:=k+16;
outtextxy(272,k,chaine);
repeat
  bar(j,k,639,k+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,j,k);
  val(chaine,hg[i],l);
until ((hg[i]>=10) and (hg[i]<=100));
chaine:='coeur ( de 1 à 10 Kpc ) :';
k:=k+16;
outtextxy(272,k,chaine);
repeat
  bar(j,k,639,k+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,j,k);
  val(chaine,rg[i],l);
until ((rg[i]>=1) and (rg[i]<=10));
chaine:='masse ( de 1 à 1000 téraMs ) :';
k:=k+16;
outtextxy(272,k,chaine);
repeat
  bar(j,k,639,k+7);
  chaine:='';
  saisie_chaine(chaine,j,k);
  val(chaine,mg[i],l);
until ((mg[i]>=1) and (mg[i]<=1000));
l:=109+trunc(xg[i]/dl*0.16);
m:=365-trunc(yg[i]/dl*0.16);
setcolor(trunc(ig[i]));
outtextxy(l,m,'G');
k:=k-112;
mg[i]:=mg[i]*1e3;
end;
bar(1,465,638,478);
setcolor(15);
chaine:='Voulez-vous modifier une de ces données (o/n) ?';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,468,chaine);
chaine:=readkey;
until ((chaine='n') or (chaine='N') or (chaine=chr(13)));
ds:=ds*1e3;
dl:=dl*1e3;
end;

```

```
procedure observateur(var ao,dos,dol,ds,dl:real;var ni:integer);
```

```
var i,j,k:integer;  
var chaine,ch:string;
```

```
begin
```

```
  repeat
```

```
    setcolor(15);
```

```
    bar(0,270,639,463);
```

```
    bar(1,465,638,478);
```

```
    chaine:='Saisie des paramètres liés à l''observateur';
```

```
    i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
```

```
    outtextxy(i,468,chaine);
```

```
    setcolor(13);
```

```
    rectangle(31,287,193,449);
```

```
    line(31,280,193,280);
```

```
    line(31,278,31,282);
```

```
    line(193,278,193,282);
```

```
    line(200,287,200,449);
```

```
    line(198,287,202,287);
```

```
    line(198,449,202,449);
```

```
    line(112,304,112,432);
```

```
    line(48,368,176,368);
```

```
    outtextxy(176,370,'x');
```

```
    outtextxy(104,296,'y');
```

```
    chaine:='Dimensions ( de 20 à 2000 " d''arc ) : ';
```

```
    i:=trunc(240+textwidth(chaine));
```

```
    if ds/dos>=dl/dol then ao:=ds/dos/5e-6  
                        else ao:=dl/dol/5e-6;
```

```
    str(ao:0:0,ch);
```

```
    chaine:=chaine+ch;
```

```
    j:=348;
```

```
    outtextxy(240,j,chaine);
```

```
    chaine:=readkey;
```

```
    if chaine=chr(13) then chaine:=ch  
                        else
```

```
      begin
```

```
        repeat
```

```
          bar(i,j,639,j+7);
```

```
          saisie_chaine(chaine,i,j);
```

```
          val(chaine,ao,k);
```

```
          chaine:='';
```

```
          until ((ao<=2000) and (ao>=20));
```

```
        end;
```

```
        str(ao:0:0,chaine);
```

```
        chaine:=chaine+' "';
```

```
        i:=trunc(abs(112-textwidth(chaine)/2));
```

```
        outtextxy(i,270,chaine);
```

```
        chaine:='Nombre d''itérations ( de 10 à 100 ) : ';
```

```
        i:=trunc(240+textwidth(chaine));
```

```
        j:=j+16;
```

```
        outtextxy(240,j,chaine);
```

```
        repeat
```

```
          bar(i,j,639,j+7);
```

```
          chaine:='';
```

```
          saisie_chaine(chaine,i,j);
```

```
          val(chaine,ni,k);
```

```
          until ((ni>=10) and (ni<=100));
```

```
          bar(1,465,638,478);
```

```
          setcolor(15);
```

```

chaîne:='Voulez-vous modifier cette donnée (o/n) ?';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaîne)/2));
outtextxy(i,468,chaîne);
chaîne:=readkey;
until ((chaîne='n') or (chaîne='N') or (chaîne=chr(13)));
end;

```

```

procedure saisie_parametres(var xs,ys,is,xg,yg,ig,rg,lg,hg,mg:vecteur;
                           var ns,ng,ni,pr:integer;
                           var dos,dol,dls,ds,dl,ao,ep:real);

```

```

var i,j,k,l,m:integer;
var chaîne,ch:string;

```

```

begin

```

```

clearviewport;

```

```

for i:=0 to 7 do if i<>6 then setrgbpalette(i,0,trunc(i*63/10),trunc(i*63/10)
                                           else setrgbpalette(20,0,trunc(i*63/10),trunc(i*63/10)

```

```

for i:=56 to 58 do setrgbpalette(i,0,trunc((i-48)*63/10),trunc((i-48)*63/10)

```

```

setrgbpalette(59,63,0,63);

```

```

setrgbpalette(60,63,0,0);

```

```

setrgbpalette(61,0,63,0);

```

```

setrgbpalette(62,0,0,63);

```

```

setrgbpalette(63,63,63,63);

```

```

setfillstyle(1,0);

```

```

settextstyle(1,0,2);

```

```

chaîne:='DEFINITION DES PARAMETRES';

```

```

i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaîne)/2));

```

```

outtextxy(i,0,chaîne);

```

```

setlinestyle(0,0,0);

```

```

line(112,80,528,80);

```

```

line(112,78,112,82);

```

```

line(528,78,528,82);

```

```

line(112,112,528,112);

```

```

line(112,110,112,114);

```

```

line(320,110,320,114);

```

```

line(528,110,528,114);

```

```

line(48,176,592,176);

```

```

settextstyle(0,0,0);

```

```

chaîne:='Dos';

```

```

i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaîne)/2));

```

```

outtextxy(i,70,chaîne);

```

```

chaîne:='Dls';

```

```

i:=trunc(abs(216-textwidth(chaîne)/2));

```

```

outtextxy(i,102,chaîne);

```

```

chaîne:='Dol';

```

```

i:=trunc(abs(424-textwidth(chaîne)/2));

```

```

outtextxy(i,102,chaîne);

```

```

for i:=0 to 2 do

```

```

begin

```

```

if i=0 then chaîne:='PLAN SOURCE'

```

```

else if i=1 then chaîne:='PLAN LENTILLE'

```

```

else chaîne:='PLAN D''OBSERVATION';

```

```

setcolor(11+i);

```

```

line(96+i*208,160,96+i*208,224);

```

```

line(96+i*208,160,128+i*208,128);

```

```

line(128+i*208,128,128+i*208,192);

```

```

line(128+i*208,192,96+i*208,224);

```

```

line(112+i*208,152,112+i*208,200);

```

```

line(100+i*208,188,124+i*208,164);

```

```

j:=trunc(abs(112+i*208-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(j,240,chaine);
rectangle(32+i*208,288,192+i*208,448);
line(32+i*208,280,192+i*208,280);
line(32+i*208,278,32+i*208,282);
line(192+i*208,278,192+i*208,282);
line(200+i*208,288,200+i*208,448);
line(198+i*208,288,202+i*208,288);
line(198+i*208,448,202+i*208,448);
line(112+i*208,304,112+i*208,432);
line(48+i*208,368,176+i*208,368);
outtextxy(176+i*208,370,'x');
outtextxy(104+i*208,296,'y');
end;
setcolor(15);
rectangle(0,464,639,479);
chaine:='APPUYEZ UNE TOUCHE POUR CONTINUER';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(chaine)/2));
outtextxy(i,468,chaine);
ch:=readkey;
distances(dos,dol,dls);
ch:=readkey;
source(xs,ys,is,ns,ds);
lentille(xg,yg,ig,rg,lg,hg,mg,ng,dos,dol,ds,dl);
observateur(ao,dos,dol,ds,dl,ni);
ep:=1e-10;
pr:=5;
end;

```

```

procedure calcul(var xs,ys,is,xg,yg,rg,mg:vecteur;
                 var ns,ng,ni,pr:integer;
                 var dos,dol,dls,ds,dl,ao,ep:real);

```

```

var xl,yl,te,pe,xo,yo,tt,pp,yp,xd,yd,st,ea,eb,a,b,r,e,f:real;
var c,d,i,j,m,n,x,y,xf,yf,xq,yq,p,ps:integer;
var ch:string;

```

```

begin
e:=ao*dol*5e-6/2;
f:=400/ao/5e-6;
st:=cint(e/ni);
ea:=2*st;
eb:=ea/pr;
xf:=240;
yf:=240;
n:=1;
a:=0;
b:=0;
d:=15;
r:=0;
p:=100;
ps:=2*pr;
repeat
if n<=ps then r:=st/ps*(n+a/2/pi)
else r:=st*(n-ps+a/2/pi);
a:=a+b;
xl:=r*cos(a);
yl:=r*sin(a);
b:=2*pi/(2*pi*n+a);

```

```

if a>=2*pi then
  begin
    a:=0;
    inc(n);
  end;
x:=xf+trunc(xl/dol*f);
y:=yf-trunc(yl/dol*f);
c:=getpixel(x,y);
if c=0 then putpixel(x,y,d);
for i:=1 to ns do
  begin
    te:=sqrt(sqr(xl-xs[i])+sqr(yl-ys[i]))/dls;
    pe:=atan(yl-ys[i],xl-xs[i],ep);
    for j:=1 to ng do calcul_angles(xg,yg,rg,mg,xl,yl,te,pe,ep,j);
    xo:=xl+dol*te*cos(pe);
    yo:=yl+dol*te*sin(pe);
    if sqrt(sqr(xo)+sqr(yo))<ea then
      begin
        tt:=te;
        pp:=pe;
        m:=0;
        b:=2*pi/(2*pi*n+a)/pr;
        xl:=(r+st)*cos(a);
        yl:=(r+st)*sin(a);
        repeat
          te:=sqrt(sqr(xl-xs[i])+sqr(yl-ys[i]))/dls;
          pe:=atan(yl-ys[i],xl-xs[i],ep);
          for j:=1 to ng do calcul_angles(xg,yg,rg,mg,xl,yl,te,pe,ep,j);
          xp:=xl+dol*te*cos(pe);
          yp:=yl+dol*te*sin(pe);
          if abs(xo-xp)>ep then xl:=dol*(tt*cos(pp)*xp-te*cos(pe)*xo)/(xo-xp)
            else xl:=r*cos(a);
          if abs(yo-yp)>ep then yl:=dol*(tt*sin(pp)*yp-te*sin(pe)*yo)/(yo-yp)
            else yl:=r*sin(a);

          xo:=xp;
          yo:=yp;
          tt:=te;
          pp:=pe;
          inc(m);
        until ((sqrt(sqr(xp)+sqr(yp))<eb) or (m>pr));
        te:=sqrt(sqr(xl-xs[i])+sqr(yl-ys[i]))/dls;
        pe:=atan(yl-ys[i],xl-xs[i],ep);
        for j:=1 to ng do calcul_angles(xg,yg,rg,mg,xl,yl,te,pe,ep,j);
        xo:=xl+dol*te*cos(pe);
        yo:=yl+dol*te*sin(pe);
        if sqrt(sqr(xo)+sqr(yo))<eb then
          begin
            xd:=cint((xl-dls*te*cos(pe))/dos*f);
            yd:=cint((yl-dls*te*sin(pe))/dos*f);
            m:=getpixel(xf+trunc(xd),yf-trunc(yd));
            if ((m=0) or (m>10)) then putpixel(xf+trunc(xd),yf-trunc(yd),trunc(is[
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
c:=getpixel(x,y);
if c=d then putpixel(x,y,0);
if p<>trunc(100*(1-r/e)) then
  begin
    str(p,ch);
    bar(576,236,639,243);
  end;

```

```

    outtextxy(576,236,ch);
end;
p:=trunc(100*(1-r/e));
until ((keypressed) or (r>e));
end;

procedure affichage_galaxies(var xg,yg,ig,lg,hg:vecteur;
                             var ng,xf,yf:integer;
                             var dol,f:real);

var i,j,k,l,m,xh,yh:integer;
var la,ha,pl,ph:real;
begin
  for i:=1 to ng do
    begin
      xh:=xf+trunc(xg[i]/dol*f);
      yh:=yf-trunc(yg[i]/dol*f);
      la:=lg[i]/dol*f;
      ha:=hg[i]/dol*f;
      pl:=sqr(la)/(4*ln(2*ig[i]));
      ph:=sqr(ha)/(4*ln(2*ig[i]));
      for j:=-trunc(la/2) to trunc(la/2) do for k:=-trunc(ha/2) to trunc(ha/2) do
        if ((xh+j<440) and (xh+j>40) and (yh+k<440) and (yh+k>40)) then
          begin
            l:=cint(ig[i]*exp(-(sqr(j)/pl+sqr(k)/ph)));
            m:=getpixel(xh+j,yh+k);
            if l>m then putpixel(xh+j,yh+k,l);
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

procedure travaux(var xs,ys,is,xg,yg,ig,rg,lg,hg,mg:vecteur;
                 var ns,ng,ni,pr:integer;
                 var dos,dol,dls,ds,dl,ao,ep:real);

var i,xf,yf,x,y:integer;
var la,ha,pl,ph,f,z:real;
var ch:string;

begin
  xf:=240;
  yf:=240;
  f:=400/5e-6/ao;
  clearviewport;
  setcolor(15);
  rectangle(36,36,444,444);
  rectangle(39,39,441,441);
  line(64,64,104,64);
  line(64,62,64,66);
  line(104,62,104,66);
  str(ao/10:0:0,ch);
  ch:=ch+' "';
  i:=84-trunc(textwidth(ch)/2);
  outtextxy(i,74,ch);
  rectangle(0,464,639,479);
  bar(1,465,638,478);
  ch:='La fenêtre encadrée donne la vision de l''objet observé';
  i:=trunc(abs(xc-textwidth(ch)/2));
  outtextxy(i,468,ch);
  ch:=readkey;

```

```

str(dos/1e6:0:1,ch);
ch:='Dos : '+ch+' Gpc';
i:=64;
outtextxy(480,i,ch);
str(dol/1e6:0:1,ch);
ch:='Dol : '+ch+' Gpc';
i:=i+16;
outtextxy(480,i,ch);
str(ns,ch);
ch:='Ns : '+ch;
i:=i+16;
outtextxy(480,i,ch);
str(ng,ch);
ch:='Ng : '+ch;
i:=i+16;
outtextxy(480,i,ch);
bar(1,465,638,478);
ch:='Voilà la vision sans déflexion gravitationnelle';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(ch)/2));
outtextxy(i,468,ch);
for i:=1 to ns do
begin
x:=xf+trunc(xs[i]/dos*f);
y:=yf-trunc(ys[i]/dos*f);
if ((x>40) and (x<440) and (y>40) and (y<440)) then putpixel(x,y,trunc(is[
end;
affichage_galaxies(xg,yg,ig,lg,hg,ng,xf,yf,dol,f);
ch:=readkey;
bar(40,40,440,440);
bar(1,465,638,478);
ch:='Calcul et tracé des mirages gravitationnels par balayage du plan lentil';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(ch)/2));
outtextxy(i,468,ch);
line(64,64,104,64);
line(64,62,64,66);
line(104,62,104,66);
str(ao/10:0:0,ch);
ch:=ch+' "';
i:=84-trunc(textwidth(ch)/2);
outtextxy(i,74,ch);
outtextxy(480,236,'% restant : ');
calcul(xs,ys,is,xg,yg,rg,mg,ns,ng,ni,pr,dos,dol,dls,ds,dl,ao,ep);
bar(480,236,639,243);
ch:=readkey;
affichage_galaxies(xg,yg,ig,lg,hg,ng,xf,yf,dol,f);
bar(1,465,638,478);
ch:='Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle';
i:=trunc(abs(xc-textwidth(ch)/2));
outtextxy(i,468,ch);
ch:=readkey;
end;

```

```

procedure programme;

```

```

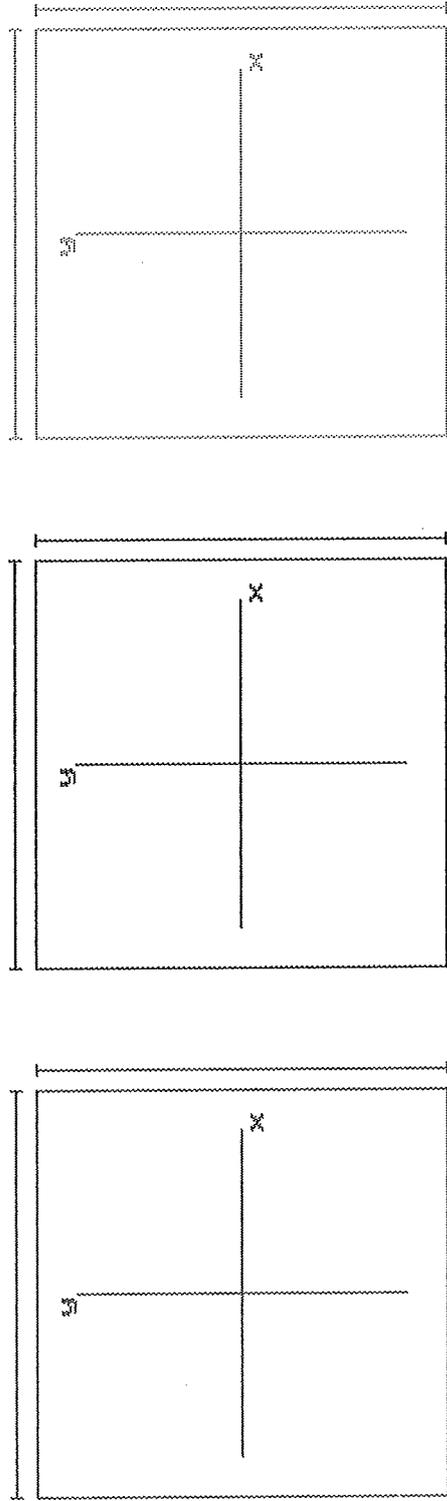
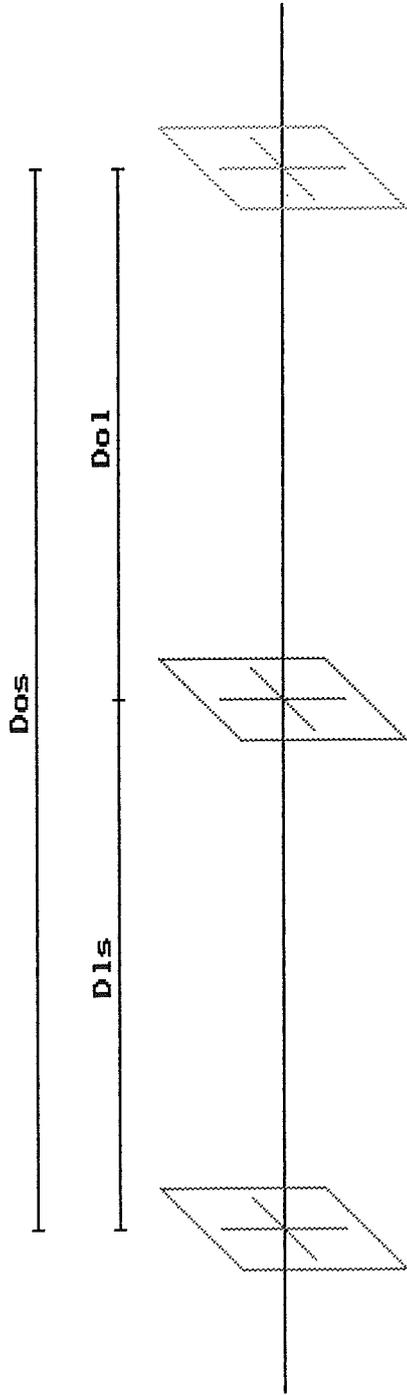
var xs,ys,is,xg,yg,ig,rg,lg,hg,mg:vecteur;
var ns,ng,ni,pr,i:integer;
var dos,dol,dls,ds,dl,ao,ep:real;
var ch:string;

```

```
begin
  repeat
    saisie_parametres(xs,ys,is,xg,yg,ig,rg,lg,hg,mg,ns,ng,ni,pr,dos,dol,dls,ds,
    travaux(xs,ys,is,xg,yg,ig,rg,lg,hg,mg,ns,ng,ni,pr,dos,dol,dls,ds,dl,ao,ep);
    bar(1,465,638,478);
    ch:='Voulez-vous redéfinir une autre configuration (o/n) ?';
    i:=trunc(abs(xc-textwidth(ch)/2));
    outtextxy(i,468,ch);
    ch:=readkey;
  until ((ch='n') or (ch='N'));
end;
```

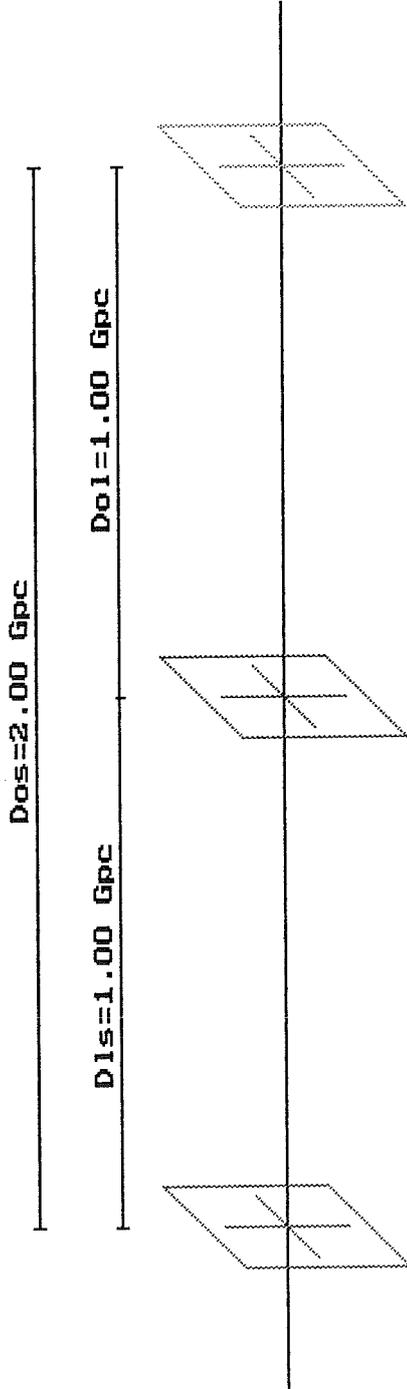
```
begin
  graphpilote:=detect;
  initgraph(graphpilote,graphmode,'c:\tp\bgi');
  if graphresult<>grok then halt(1);
  setgraphmode(2);
  xc:=trunc((getmaxx+1)/2);
  yc:=trunc((getmaxy+1)/2);
  programme;
  closegraph;
end.
```

DEFINITION DES PARAMETRES



APPUYEZ UNE TOUCHE POUR CONTINUER

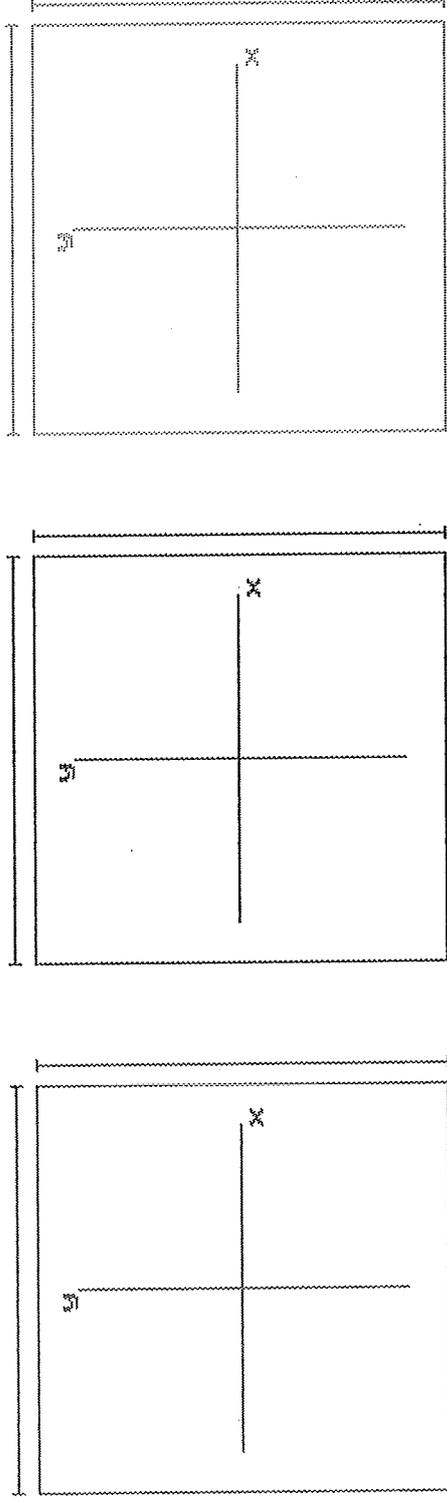
DEFINITION DES PARAMETRES



PLAN SOURCE

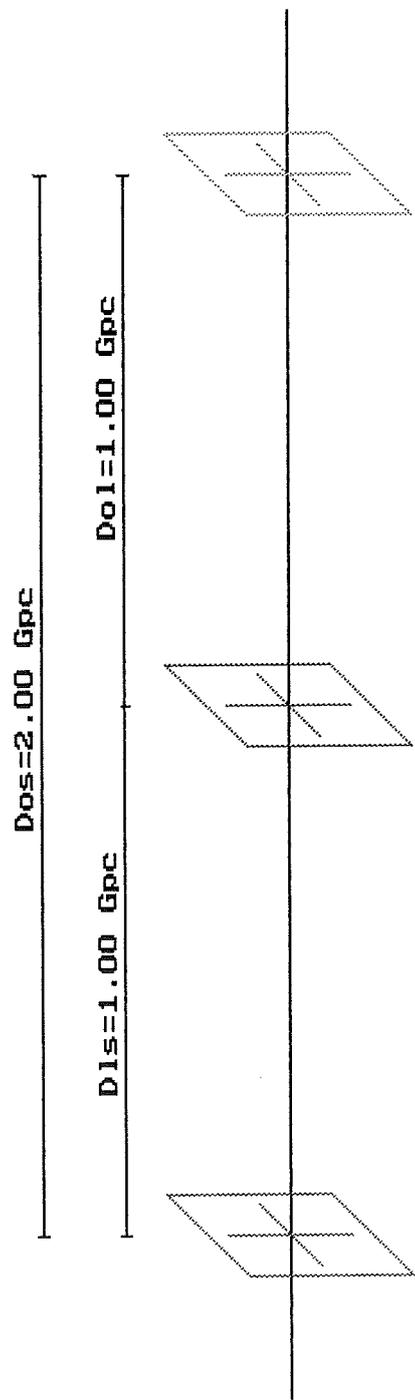
PLAN LENTILLE

PLAN D'OBSERVATION



La distance lentille-source D_{ls} se calcule automatiquement

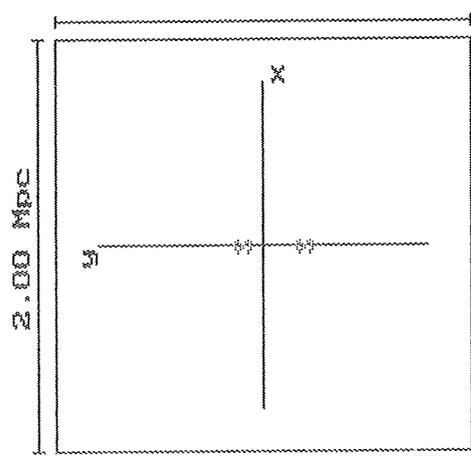
DEFINITION DES PARAMETRES



PLAN SOURCE

PLAN LENTILLE

PLAN D'OBSERVATION



- Dimensions (de 0.5 à 5 Mpc) : 2
- Nombre de sources (de 1 à 20) : 2
- Paramètres de la 2-ième source :
 - coordonnée en x (en Kpc) : 0
 - coordonnée en y (en Kpc) : -200
 - intensité (de 1 à 10) : 10

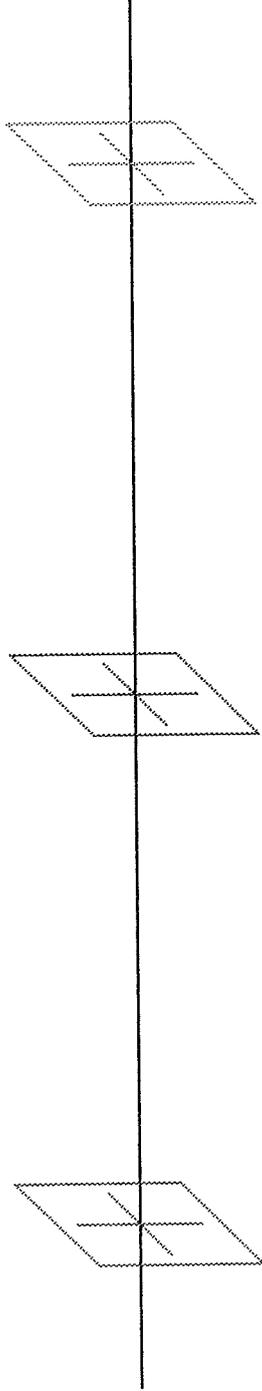
Voulez-vous modifier une de ces données (o/n) ?

DEFINITION DES PARAMETRES

Dos=2.00 Gpc

Dls=1.00 Gpc

Dol=1.00 Gpc

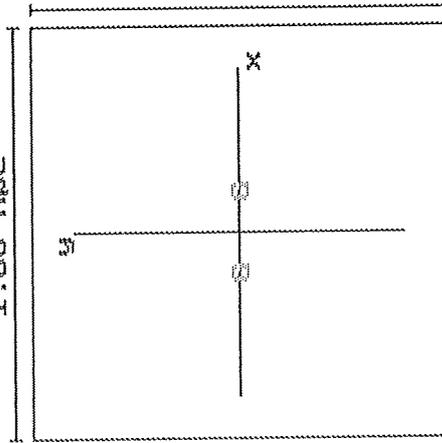


PLAN SOURCE

PLAN LENTILLE

PLAN D'OBSERVATION

1.00 Mpc



Dimensions (de 0.5 à 5 Mpc) : 1.00
 Nombre de galaxies (de 1 à 20) : 2
 Paramètres de la 2-ième galaxie :
 coordonnée en x (en Kpc) : 100
 coordonnée en y (en Kpc) : 0
 intensité (de 1 à 10) : 10
 largeur (de 10 à 100 Kpc) : 100
 hauteur (de 10 à 100 Kpc) : 100
 coeur (de 1 à 10 Kpc) : 10
 masse (de 1 à 1000 térams) : 400

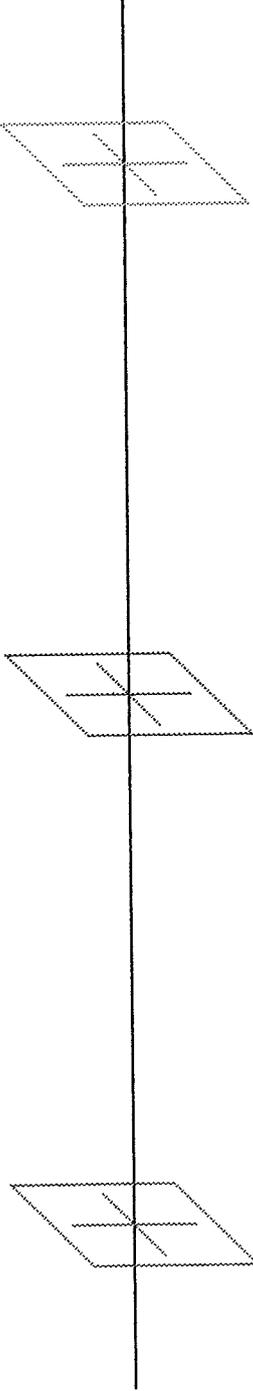
Voulez-vous modifier une de ces données (o/n) ?

DEFINITION DES PARAMETRES

Dos=2.00 Gpc

Dis=1.00 Gpc

Do1=1.00 Gpc

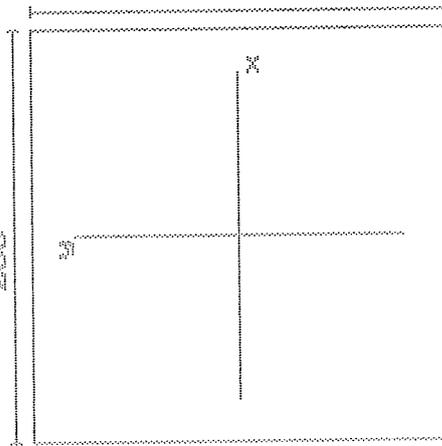


PLAN SOURCE

PLAN LENTILLE

PLAN D'OBSERVATION

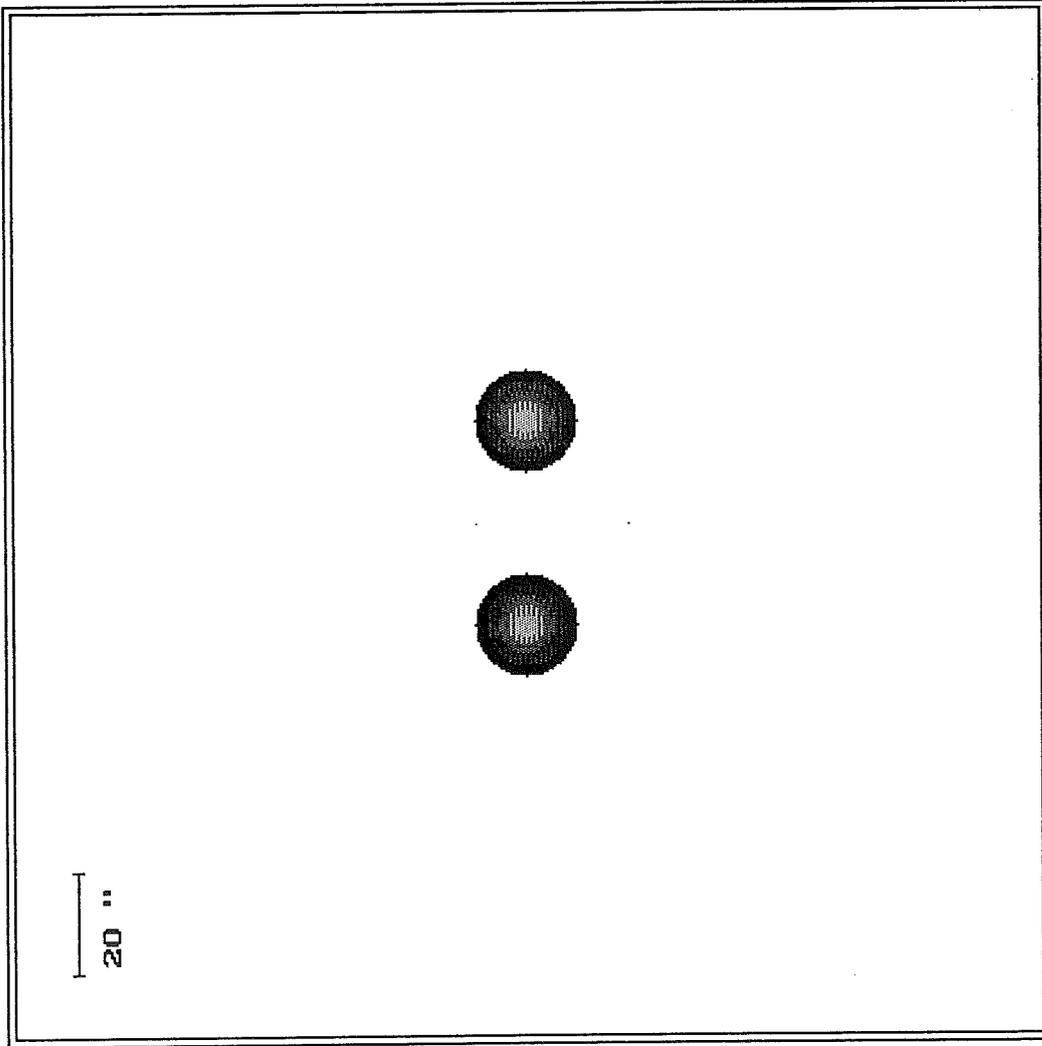
200 ''



Dimensions (de 20 à 2000 '' d'arc) : 200
Nombre d'itérations (de 10 à 100) : 50

Voulez-vous modifier cette donnée (o/n) ?

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 2
Ng : 2



Voilà la vision sans déflexion gravitationnelle

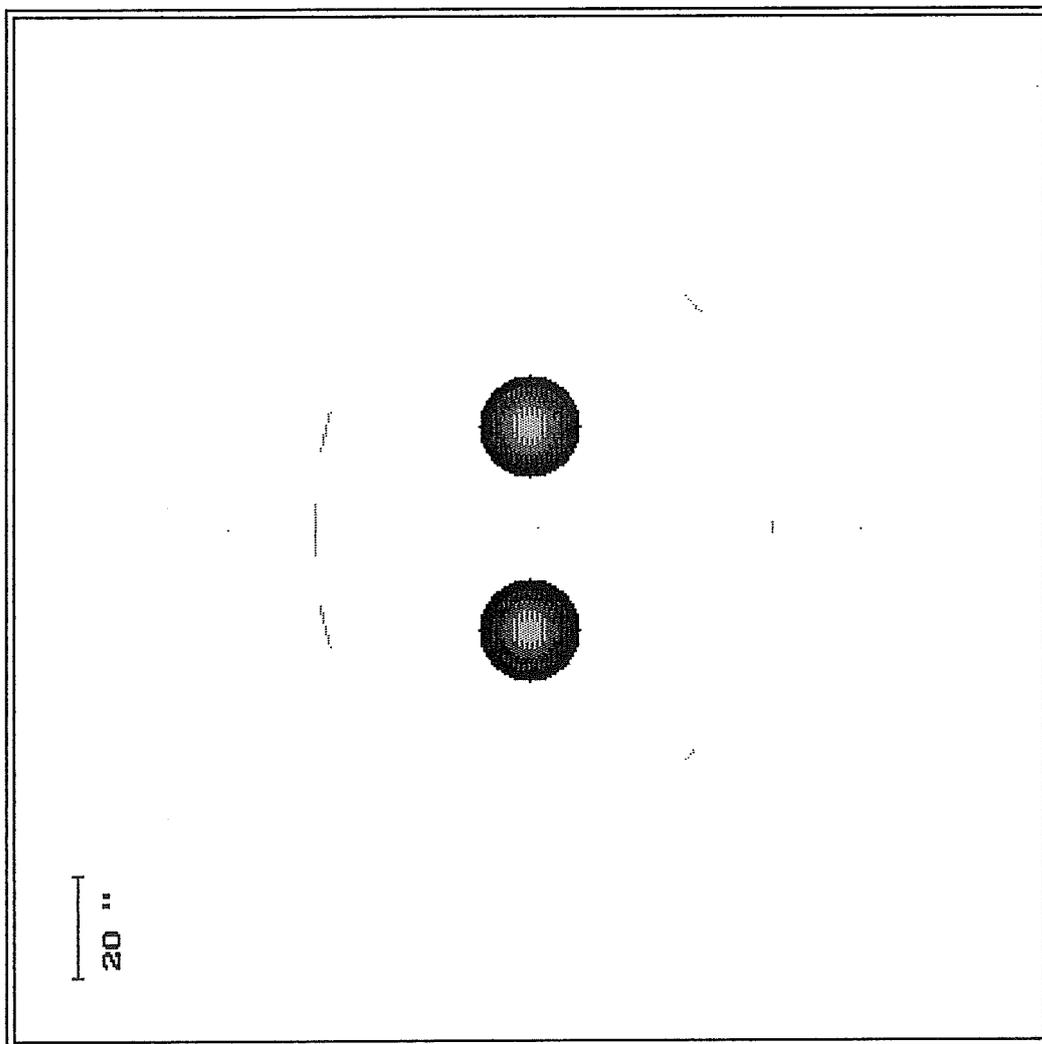
Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 2
Ng : 2

% restant : 33



Calcul et tracé des mirages gravitationnels par balayage du plan lentille

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 2
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

V. EXEMPLES D'APPLICATION

Nous allons , dans les pages qui vont suivre , donner quelques exemples d'application de ce programme que nous venons de décrire .

Nous effectuerons ainsi quatre séries de simulations :

Les deux premières séries nous permettront de visualiser l'évolution de la position des mirages si un paramètre évolue .

De même , dans les deux dernières séries , nous tenterons de montrer que certaines configurations très différentes conduisent pourtant au même résultat .

1) Première série de simulations

Dans cette première série de simulations , nous considérons la configuration suivante :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 seule source
- Nombre de galaxies : 1 seule galaxie
- Masse de la galaxie : 10.000 milliards de masses solaires
- Situation de la source : il s'agit du paramètre que nous allons faire évoluer

Nous allons donc , pendant les cinq prochaines simulations , prendre des situations de sources différentes .

Pour notre première simulation , la source sera exactement dans l'axe de visée de la galaxie , l'écart angulaire visuel pour l'observateur sera donc nul .

Cette configuration permet alors d'obtenir un cercle parfait , le cercle d'Einstein .

Pour les simulations suivantes , nous supposerons que la source se trouve au-dessus de la galaxie du plan lentille , à des écarts angulaires croissants .

Elle sera ainsi située à une demi-seconde d'arc , une seconde d'arc , deux secondes d'arc et quatre secondes d'arc au-dessus de la galaxie défectrice .

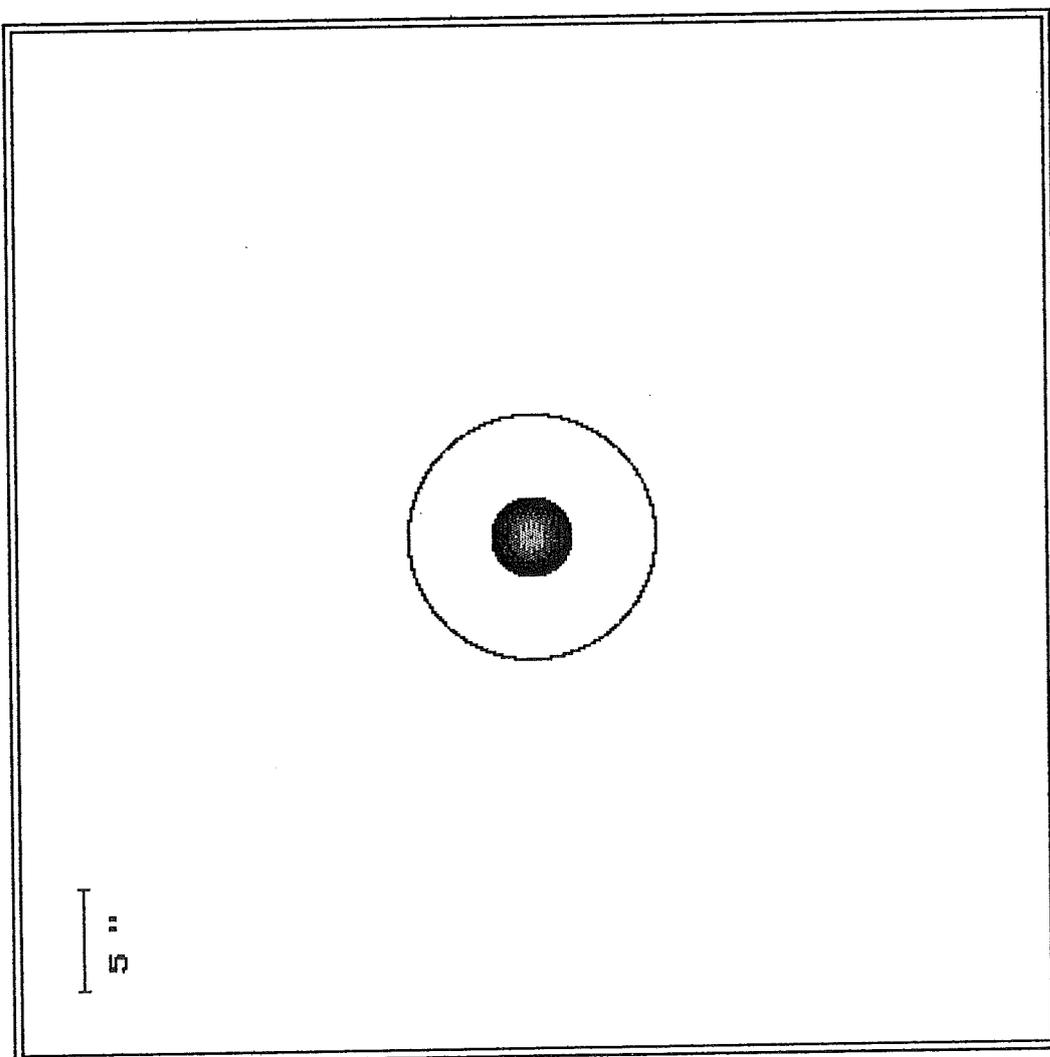
Ces quatre simulations montrent un décalage des mirages vers le haut , avec une diminution de l'étendue des arcs , pour parvenir , enfin , pour un décalage angulaire de quatre secondes d'arc , à un mirage gravitationnel ponctuel .

Nous pouvons aussi remarquer , dans cette série de simulations , que la règle de parité des mirages gravitationnels est respectée . En effet , nous avons vu que le nombre de sources virtuelles était impair , sauf dans le cas du point masse .

Comme nous considérons que le potentiel possède un rayon de coeur , le nombre de mirages est impair . Dans chacune des simulations , nous pouvons remarquer la présence , à l'intérieur même de la galaxie , d'un petit point qui n'est autre que le troisième mirage .

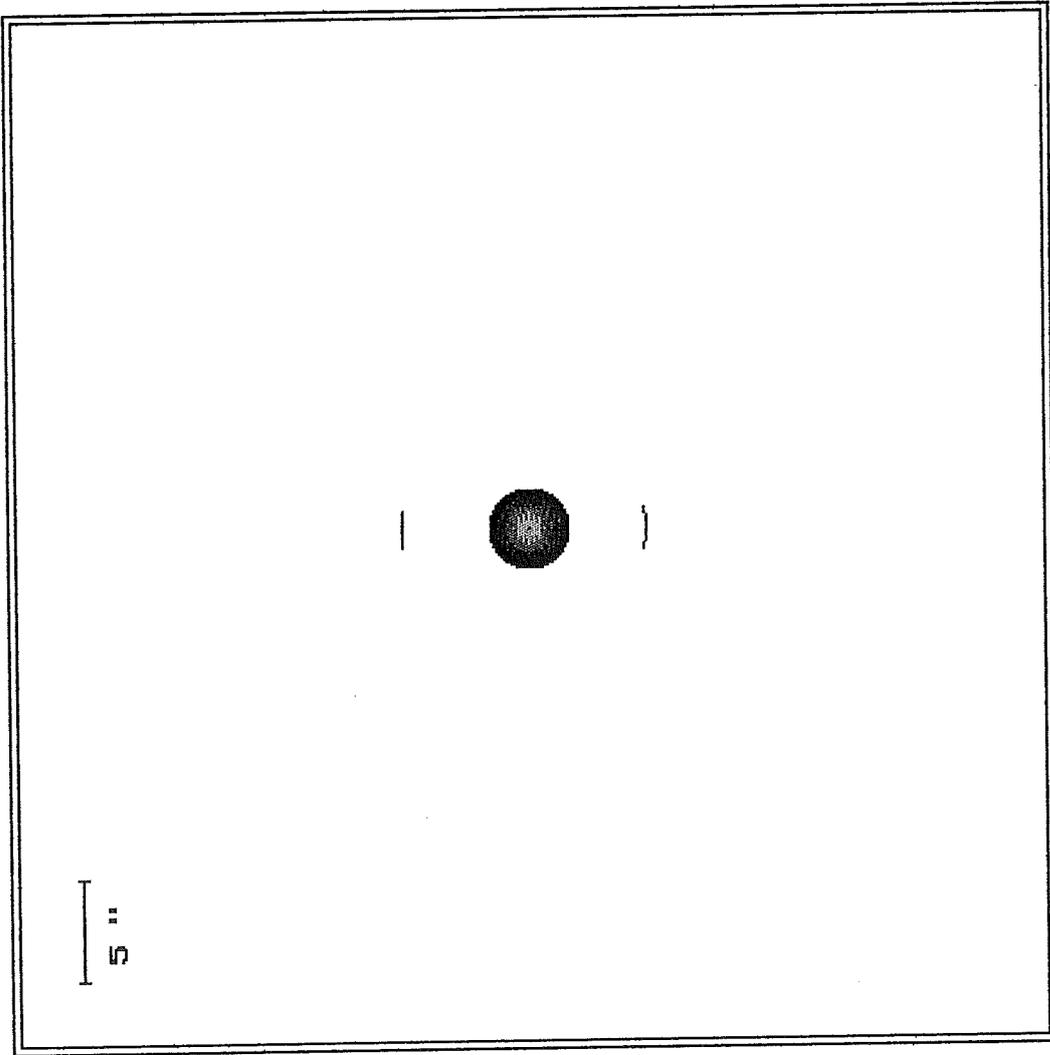
Dans le cas du cercle d'Einstein , nous avons également trois mirages . L'un d'eux est exactement situé au centre de la galaxie , et les deux autres sont des arcs en demi-cercle .

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ms : 1
Ng : 1



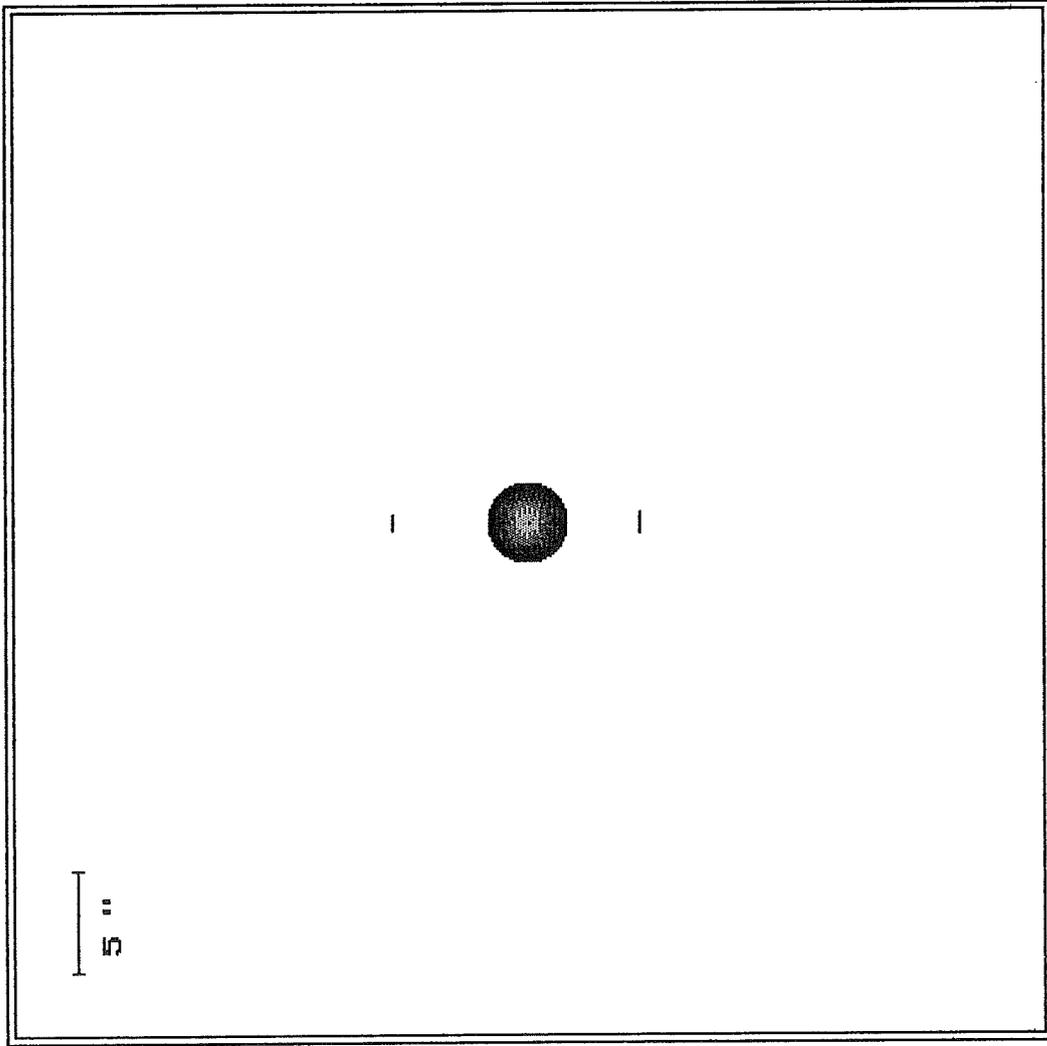
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

DOS : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
NS : 1
Ng : 1



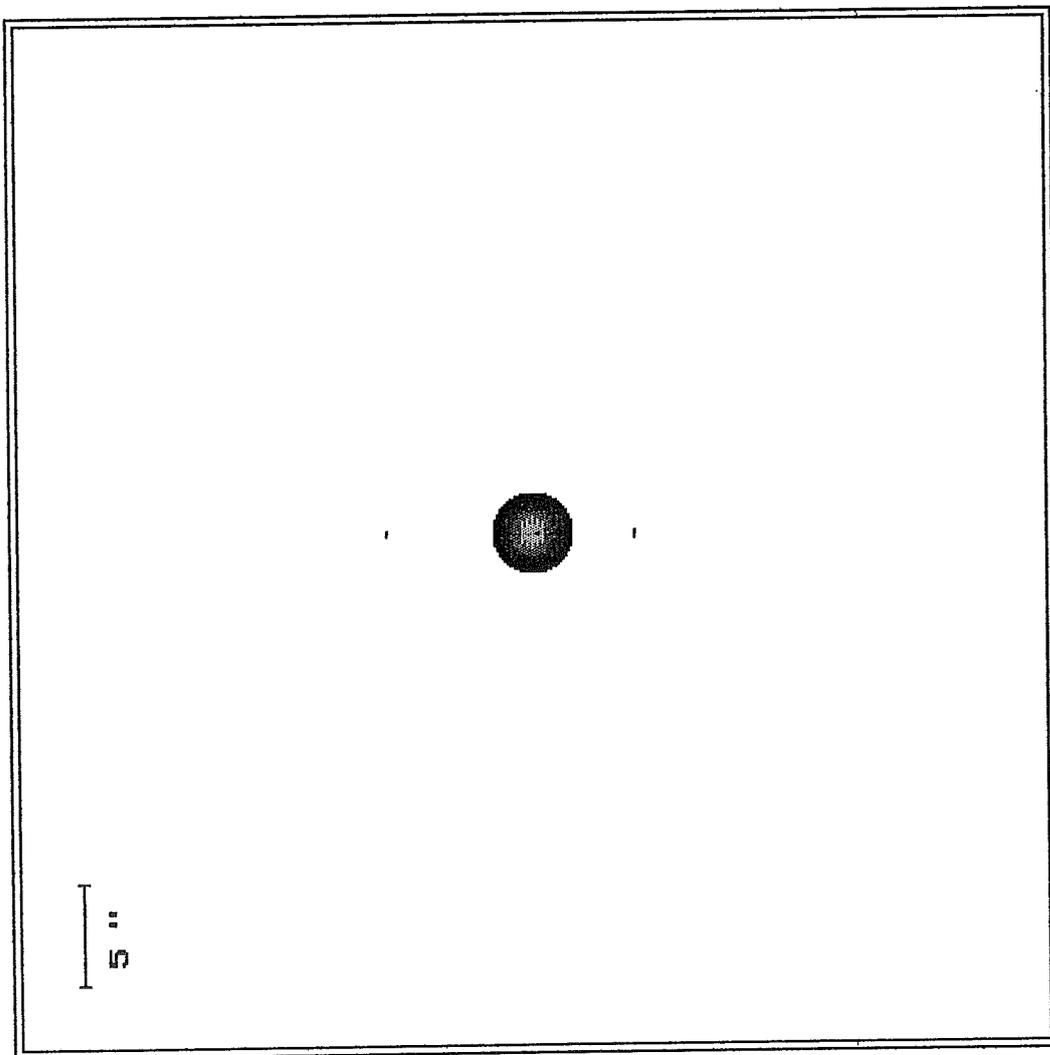
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
DoI : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 1



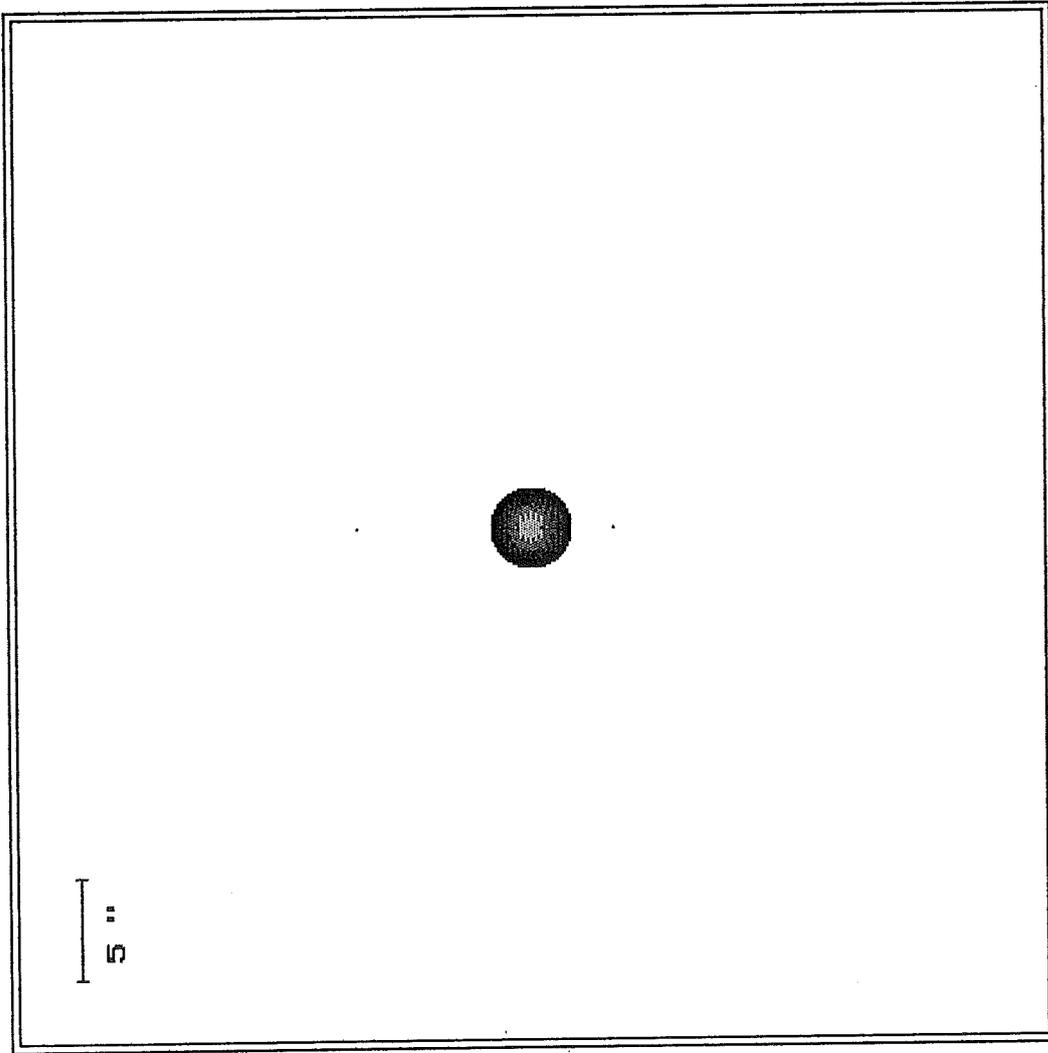
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Mg : 1



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 1



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

2) Deuxième série de simulations

Dans cette deuxième série de simulations , nous considérons la configuration suivante :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 seule source
- Nombre de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Situation de la source : il s'agit du paramètre que nous allons faire évoluer

Nous allons donc , pendant les cinq prochaines simulations , prendre des situations de sources différentes .

Pour notre première simulation , la source sera exactement confondue avec le centre du segment joignant les deux galaxies . L'écart angulaire entre le centre du segment joignant les deux galaxies et la source est donc nul .

Cette configuration permet alors d'obtenir une croix , la croix d'Einstein .

Pour les simulations suivantes , nous supposons que la source se trouve au-dessus du centre de masse des deux galaxies du plan lentille , les masses des galaxies étant identiques , à des écarts angulaires croissants .

Elle sera ainsi située à une demi-seconde d'arc , une seconde d'arc , deux secondes d'arc et quatre secondes d'arc au-dessus de ce centre de masse .

Ces quatre simulations , comme dans la première série , montrent un décalage des mirages vers le haut .

De plus , dans les cas où les écarts angulaires sont de une demi-seconde et une seconde d'arc , les arcs correspondant sont très étendus . Les arcs situés sur les extrémités de la barre horizontale de la croix se déplacent vers le bas , suivant un arc de cercle , avant de fusionner en un écart angulaire de la source d'une seconde d'arc .

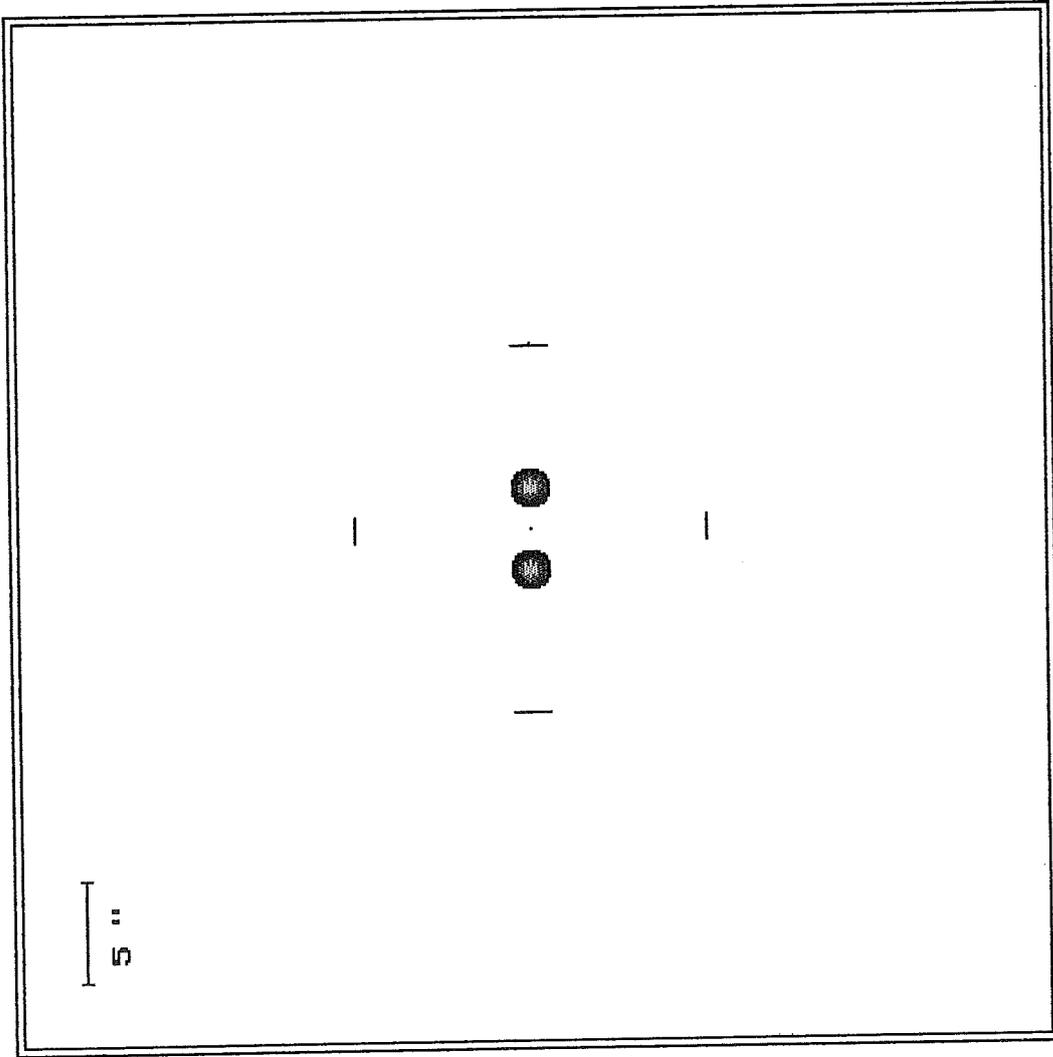
Ensuite , la dimension des arcs devient de plus en plus restreinte et nous parvenons , dans notre dernière simulation , à une structure quasi-ponctuelle de chacun des mirages .

Comme dans la série précédente , nous pouvons vérifier ici la propriété de non-parité du nombre de mirages .

Nous observons dans notre première simulation cinq mirages gravitationnels , dont quatre sont situés aux extrémités d'une croix et la cinquième au centre de cette croix .

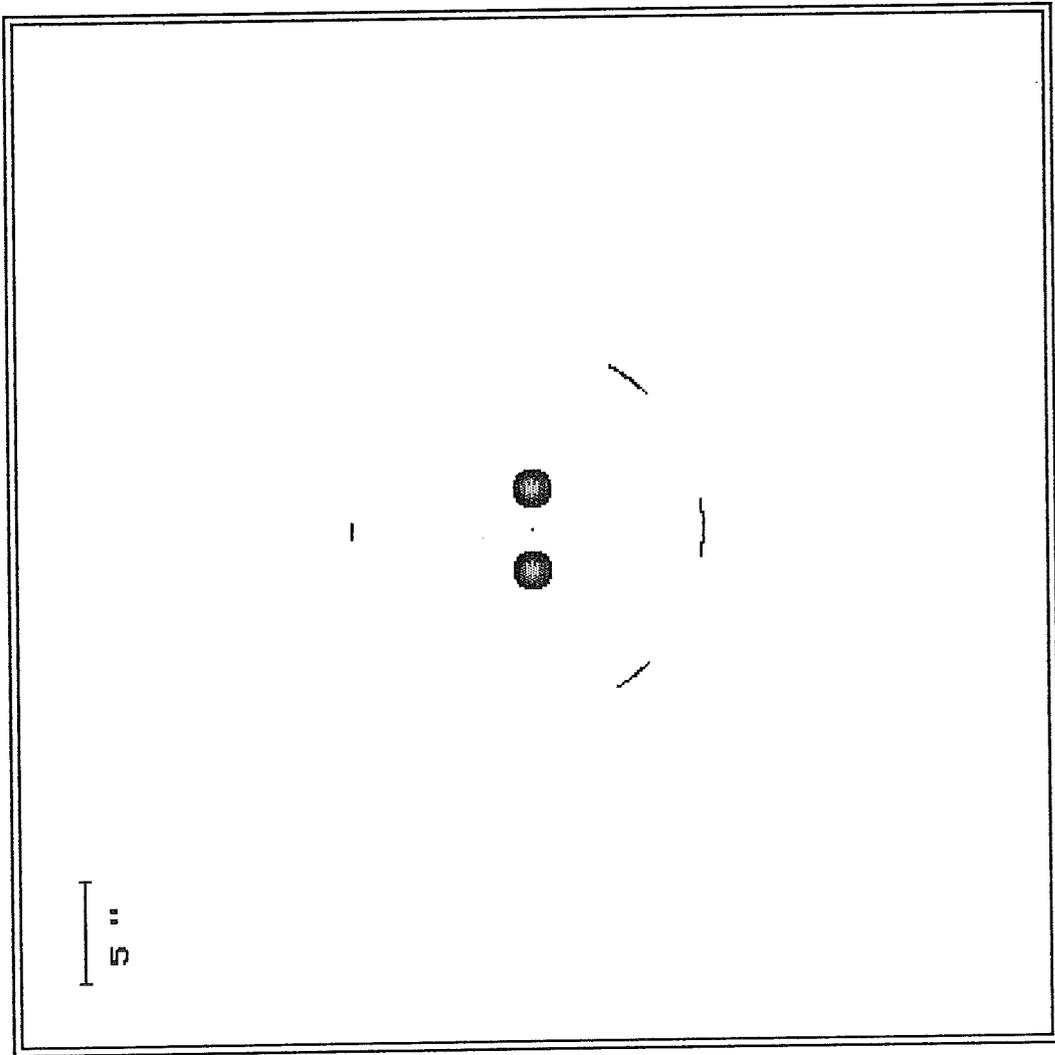
Quand les deux mirages situés sur la barre horizontale de la croix fusionnent avec le mirage situé en bas de la barre verticale , il n'y a plus que trois mirages . Ces trois mirages restent visibles jusqu'à la dernière simulation .

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



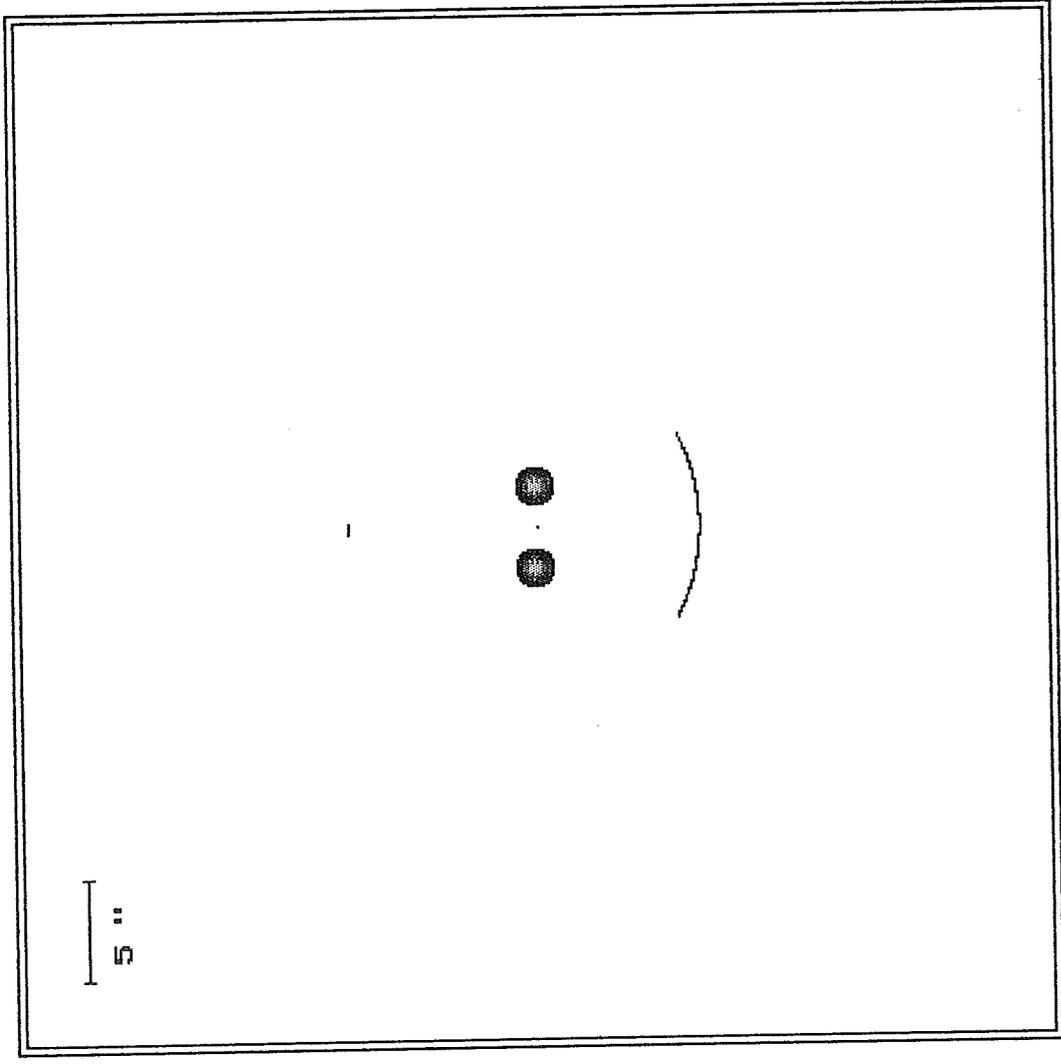
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



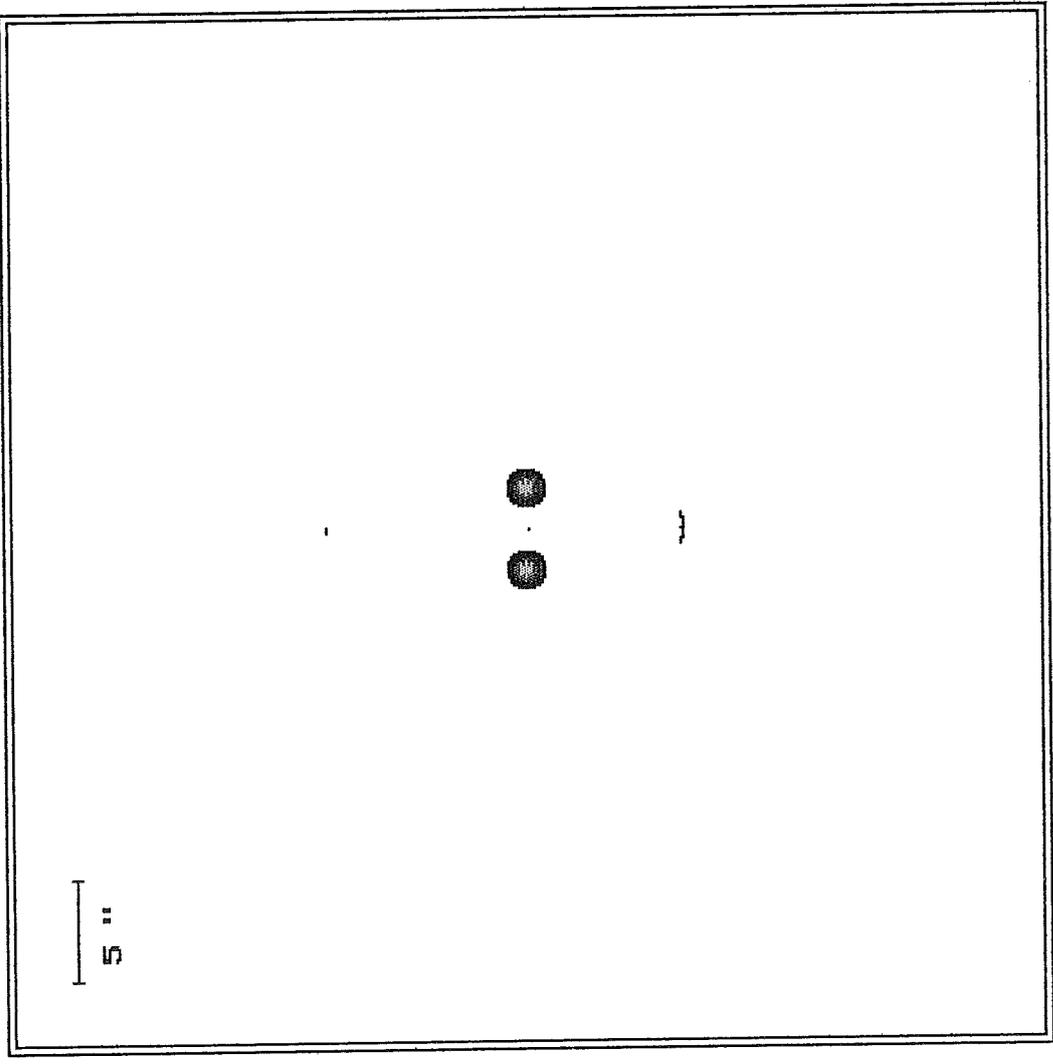
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



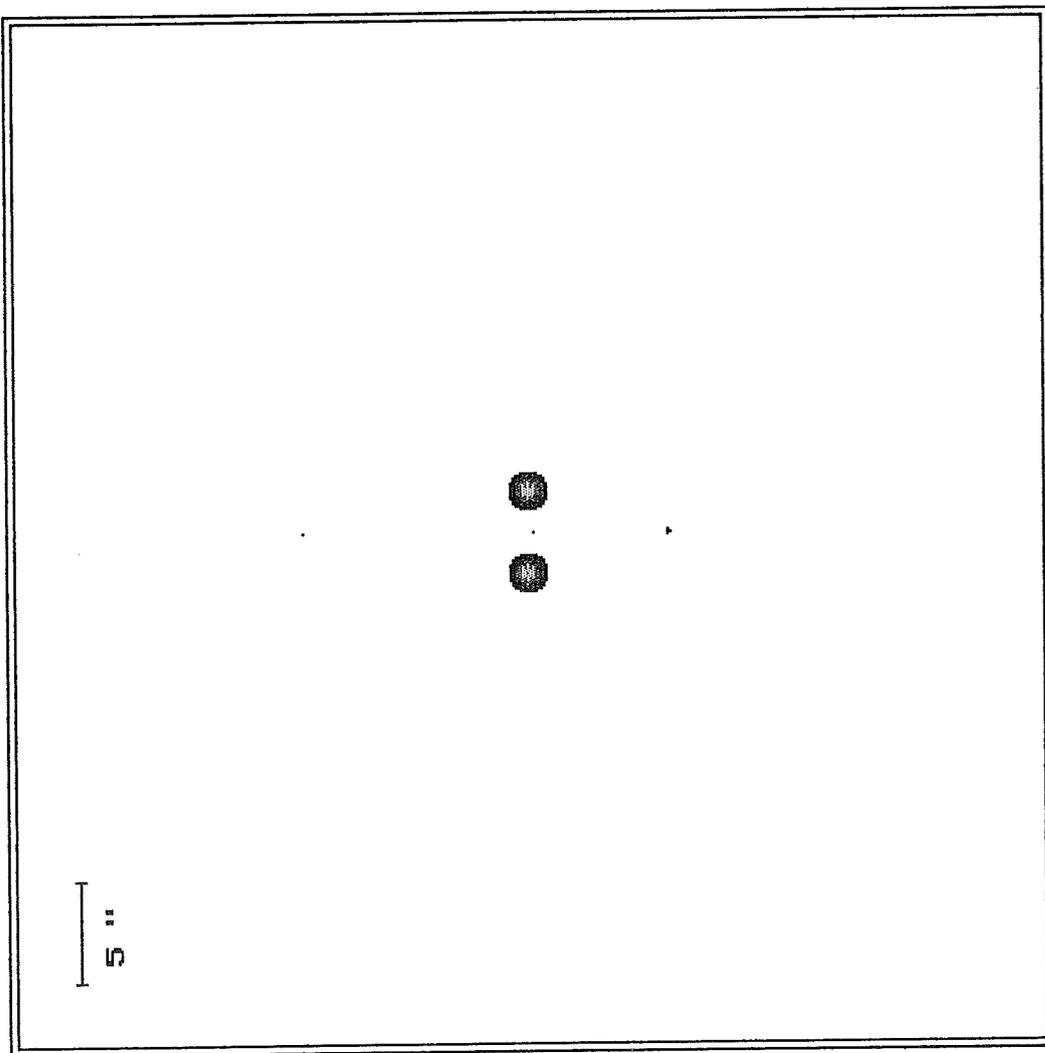
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

3) Dernières séries de simulations

Dans les deux dernières séries qui vont suivre , nous allons montrer que l'observation de certaines répartitions de mirages n'appellent pas une configuration unique du problème .

En effet , dans les deux séries qui vont suivre , nous allons prendre des configurations de lentilles très différentes et nous allons pourtant retrouver sensiblement des résultats connus .

Dans le premier cas , nous considérons la configuration suivante :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 seule source
- Nombre de galaxies : 3 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Situation de la source : il s'agit du paramètre que nous allons faire évoluer

Les trois galaxies sont situées au sommet d'un triangle équilatéral .

Nous allons donc , pendant les cinq prochaines simulations , prendre des situations de sources différentes .

Pour notre première simulation , la source sera exactement confondue avec le centre géométrique de triangle dont les sommets sont les galaxies . L'écart angulaire entre le centre de géométrie des galaxies et la source est donc nul .

Cette configuration , contre toute prévision intuitive , donne un magnifique cercle d'Einstein . Ce cercle est de rayon plus grand que celui que nous avons déjà observé dans la première série de simulations . Nous retrouvons également , au centre , le cinquième mirage ponctuel que nous avons déjà observé .

Cette configuration à trois galaxies équivaut donc à celle d'une configuration à une galaxie .

Pour les simulations suivantes , nous supposerons que la source se trouve au-dessus du centre de masse des trois galaxies du plan lentille , les masses des galaxies étant identiques , à des écarts angulaires croissants .

Elle sera ainsi située à une demi-seconde d'arc , une seconde d'arc , deux secondes d'arc et quatre secondes d'arc au-dessus de ce centre de masse .

Nous retrouvons , là aussi , sensiblement les mêmes résultats . Les arcs sont légèrement plus étendus , mais la répartition spatiale reste identique à celle que nous avons déjà observée.

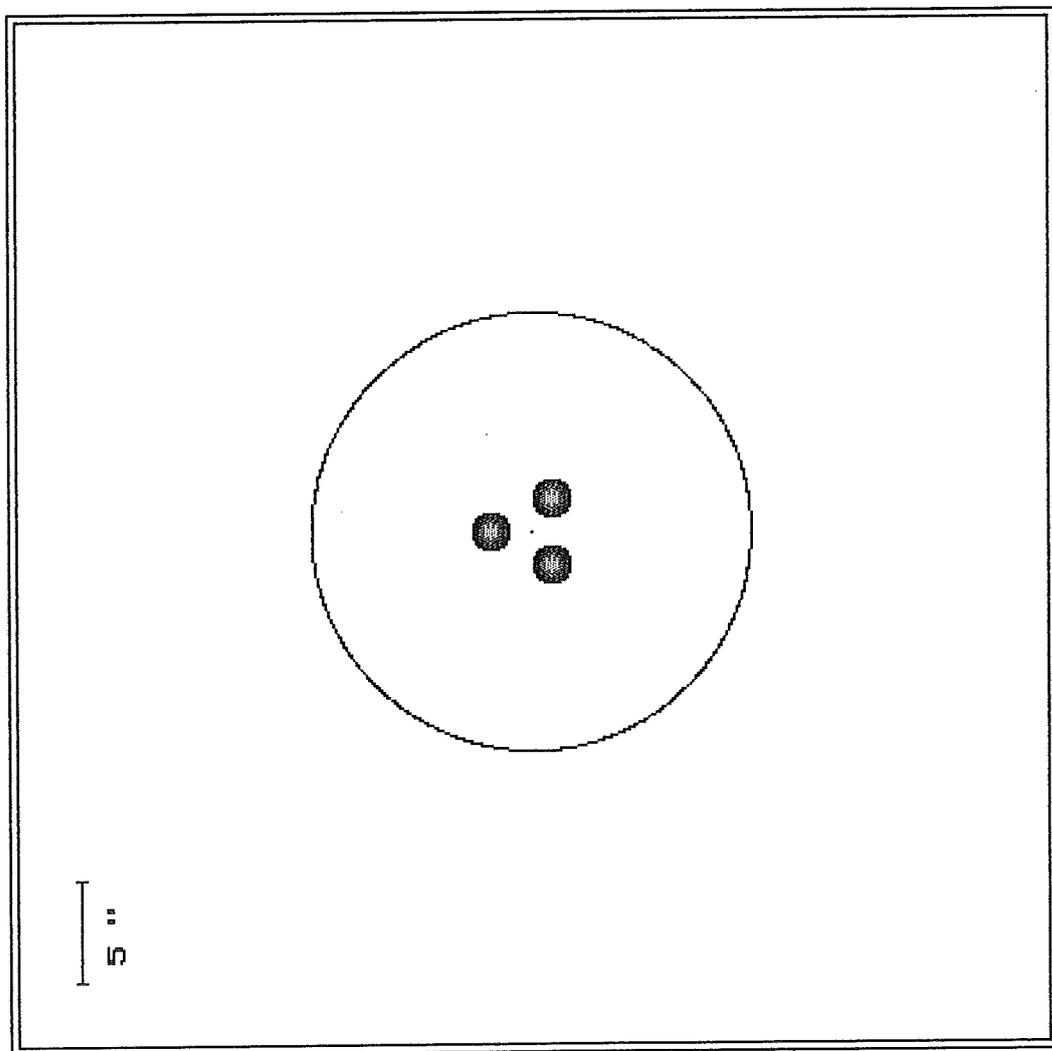
Dans le second cas , nous considérons une configuration à quatre galaxies de masses identiques , situées aux sommets d'un carré .

Nous retrouvons là encore le cercle d'Einstein , plus étendu que précédemment grâce à la masse totale plus grande de la lentille . Ici aussi , un mirage central apparaît .

Si nous effectuons les mêmes évolutions , les mêmes effets se font remarquer

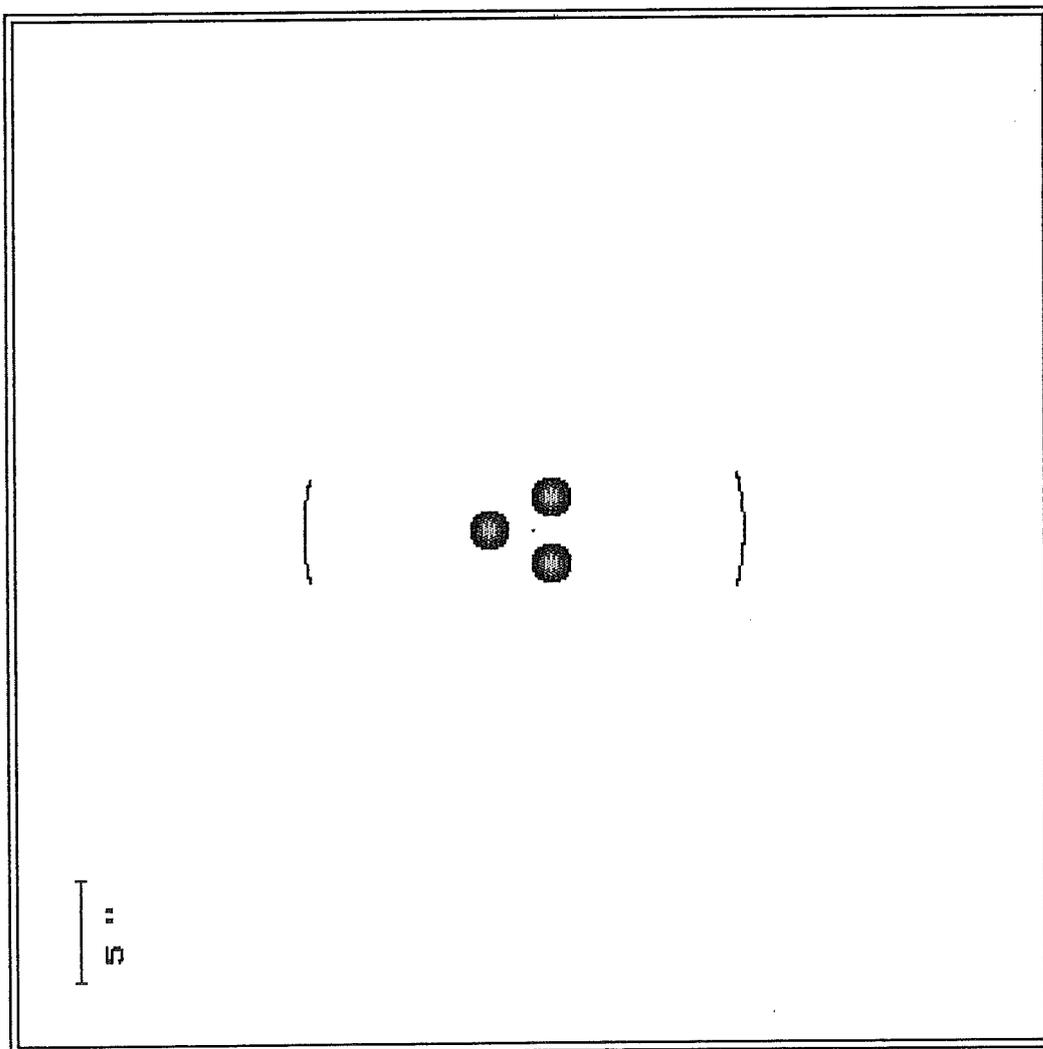
Il est donc très ardu de vouloir , à partir de l'observation , prévoir sans précaution la répartition spatiale des galaxies créant cette déflexion gravitationnelle .

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3



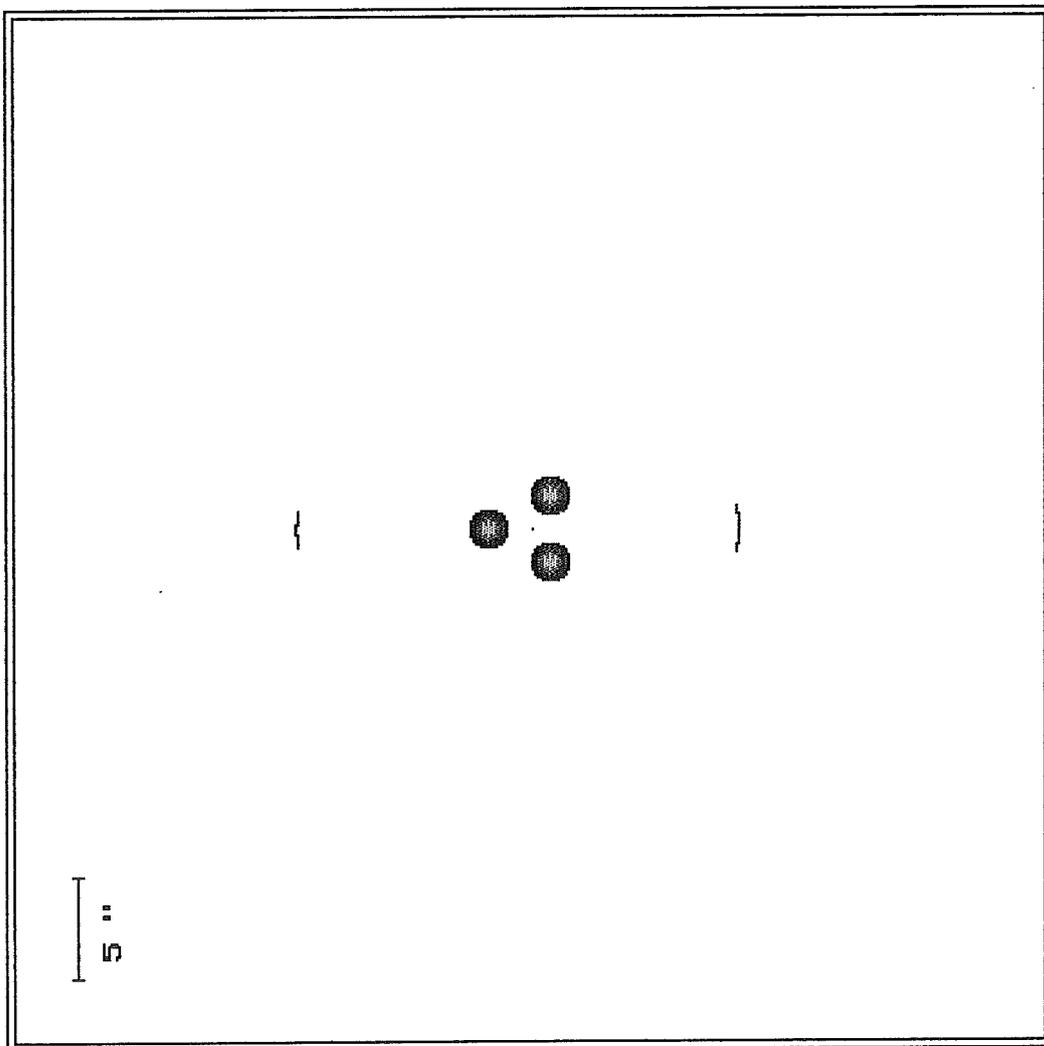
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3

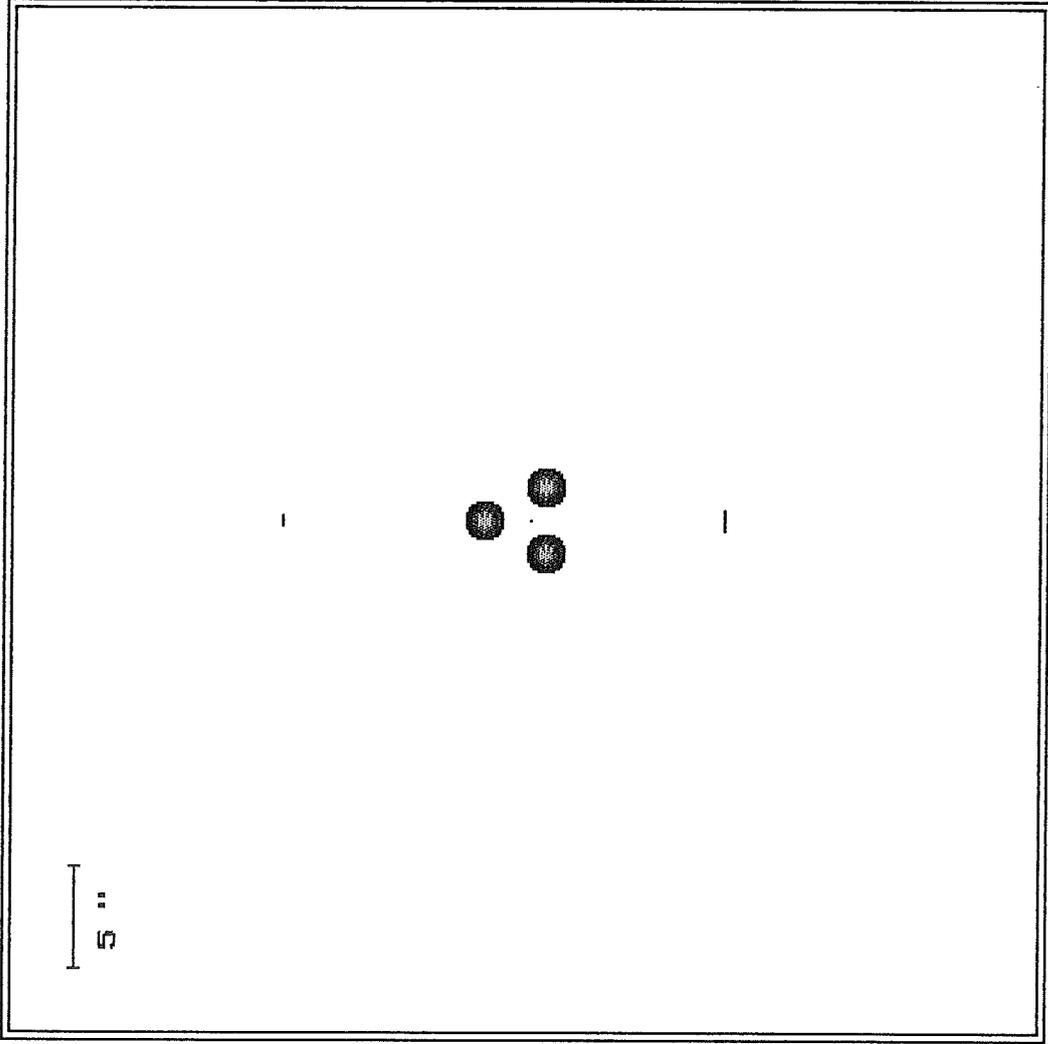


Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3

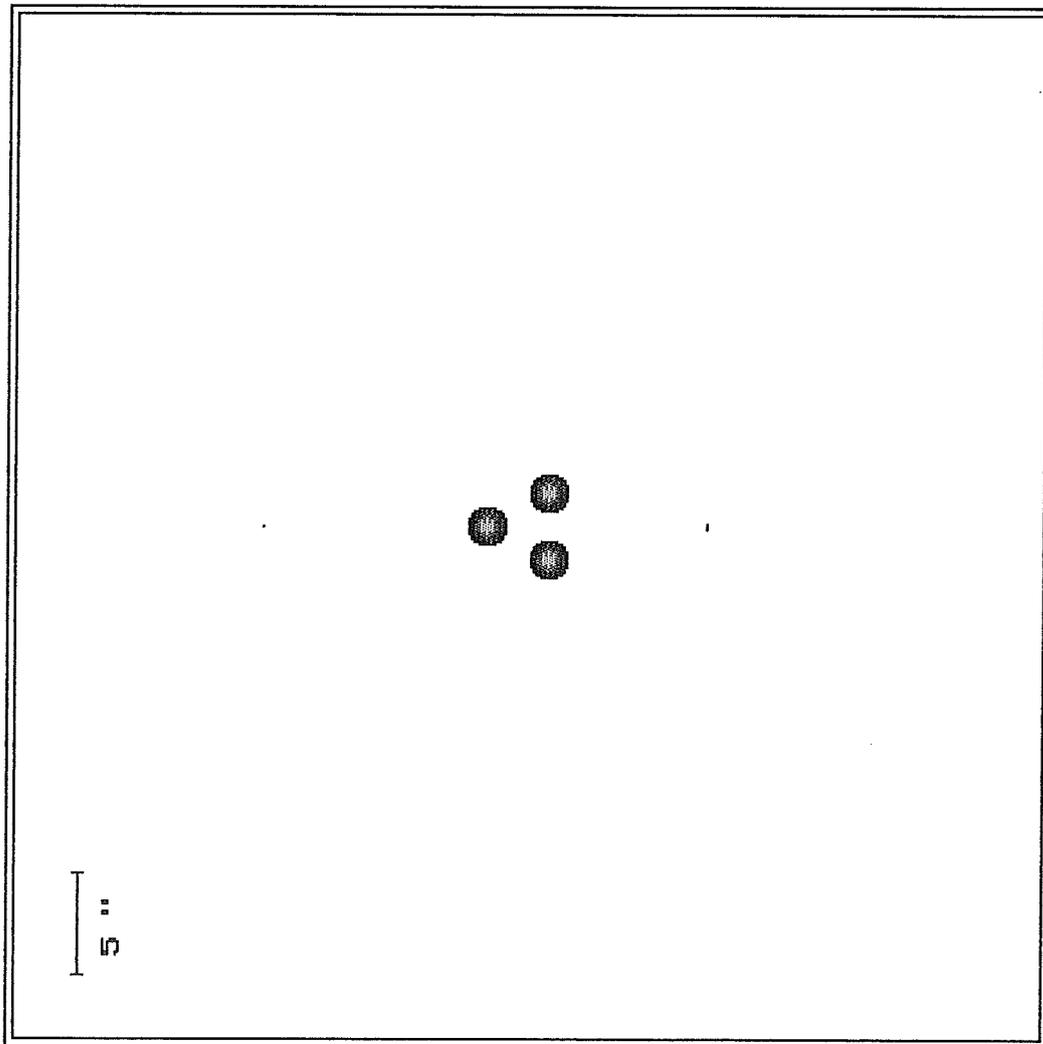


Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3

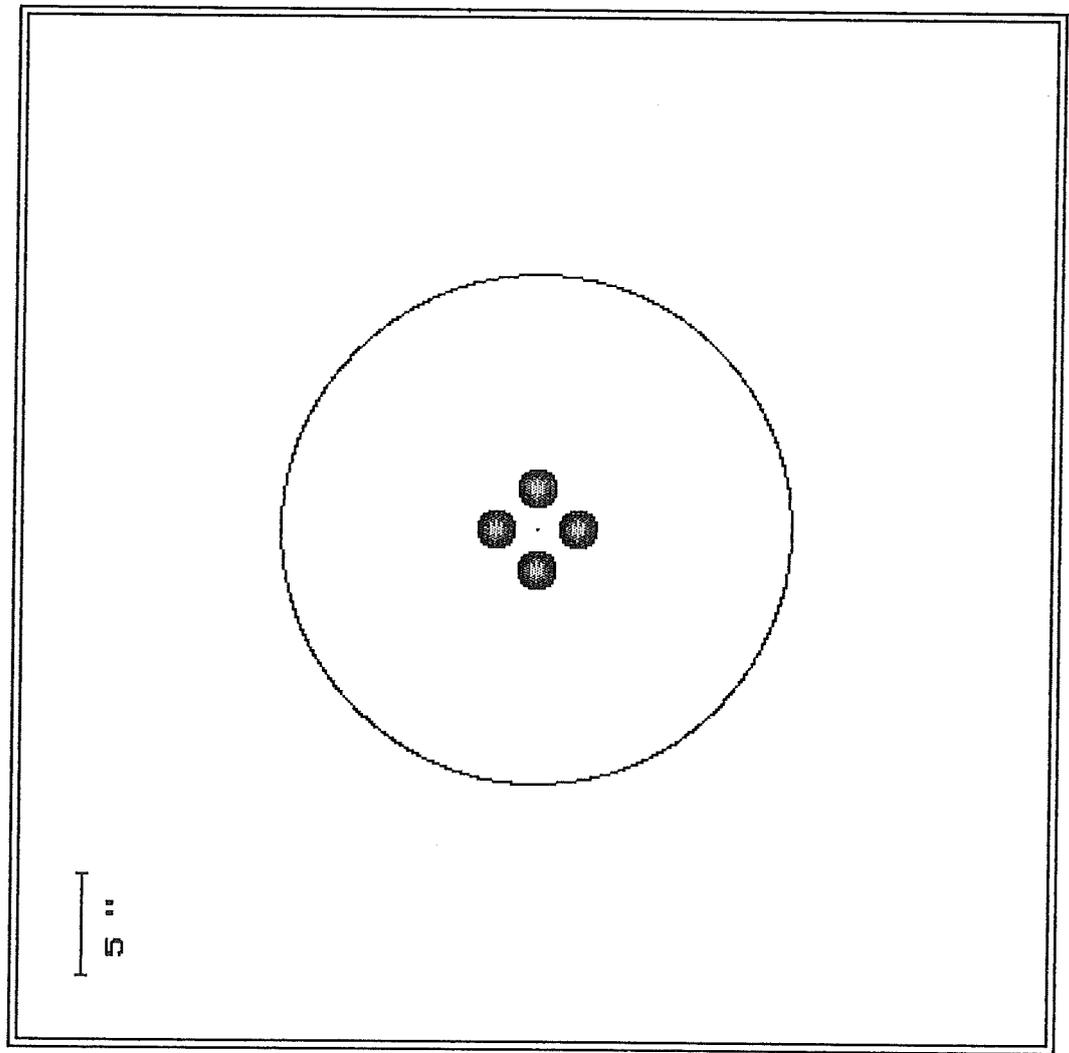
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



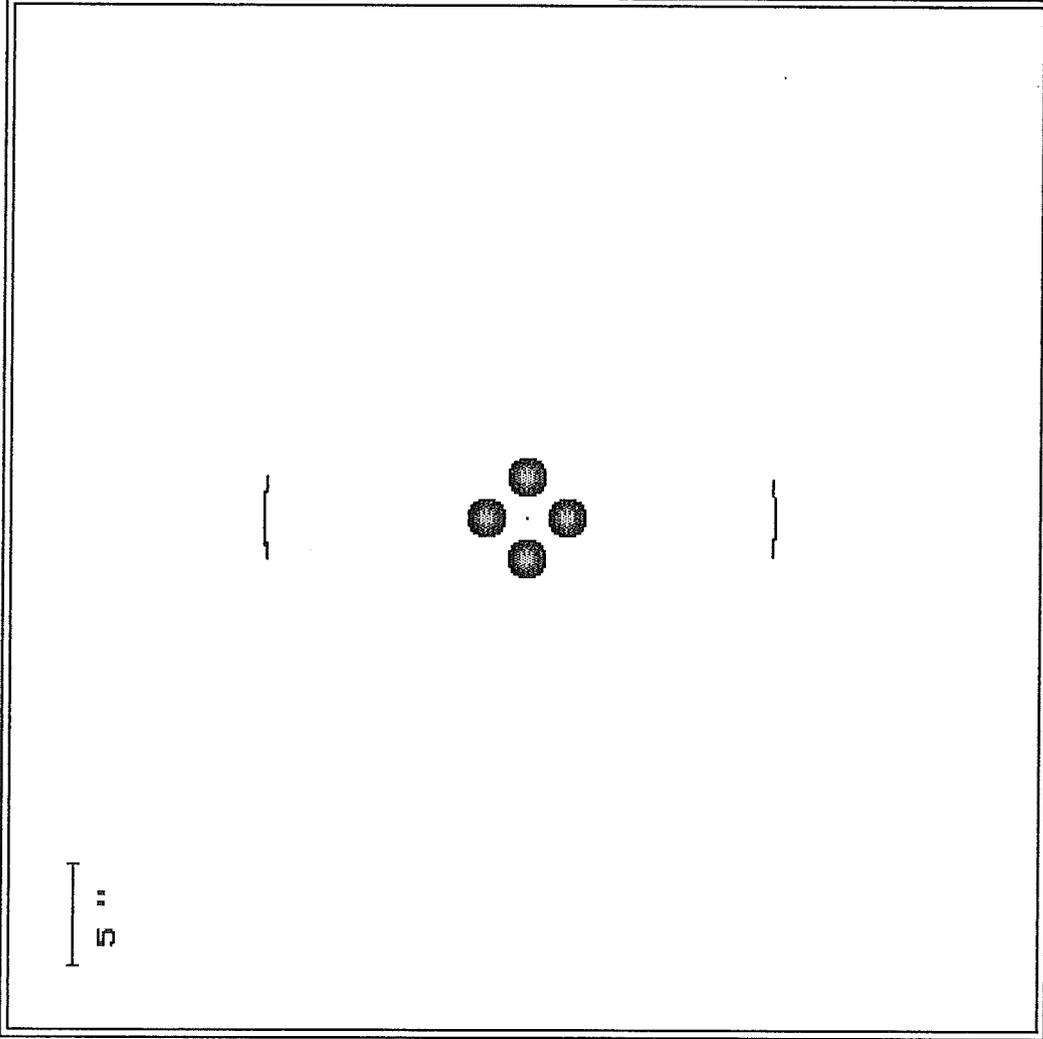
Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3

Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4

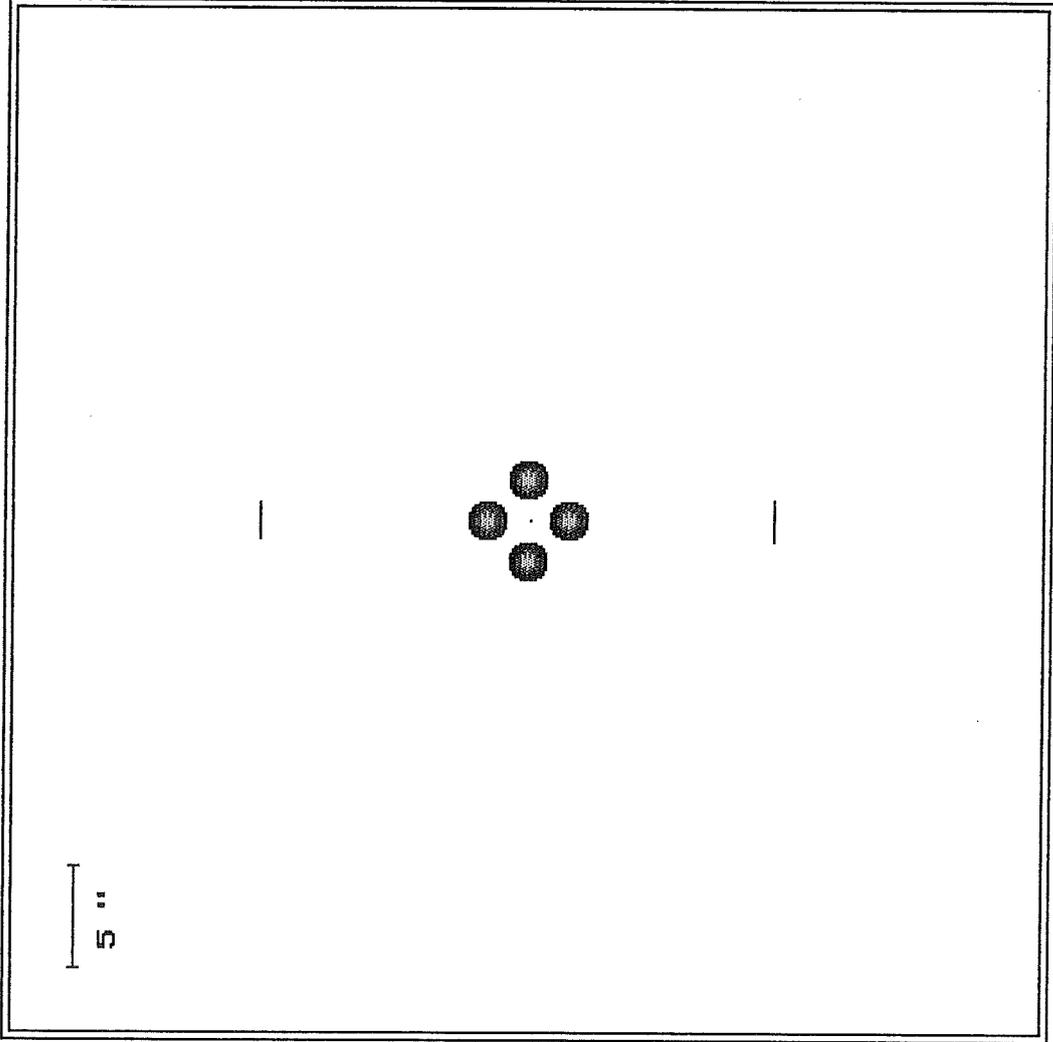


Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4

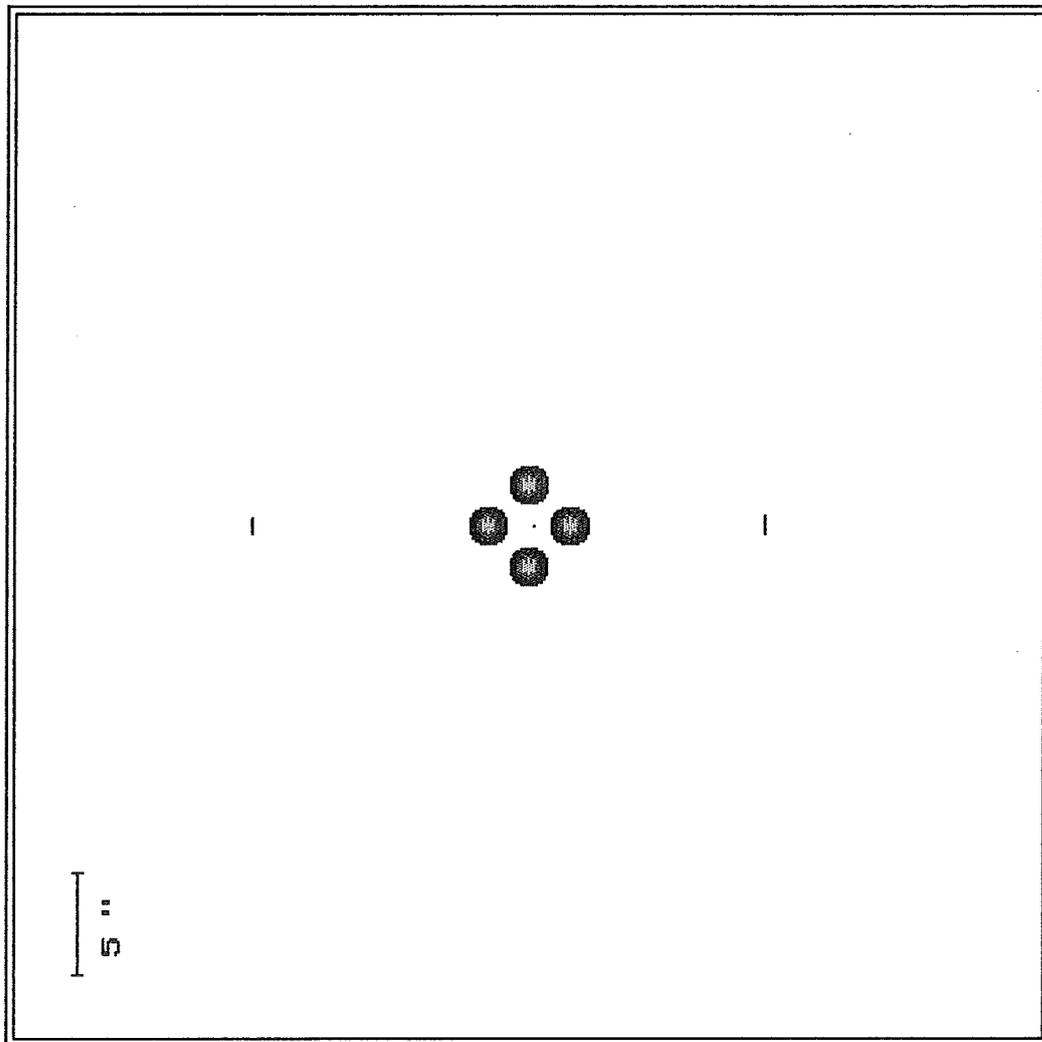
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



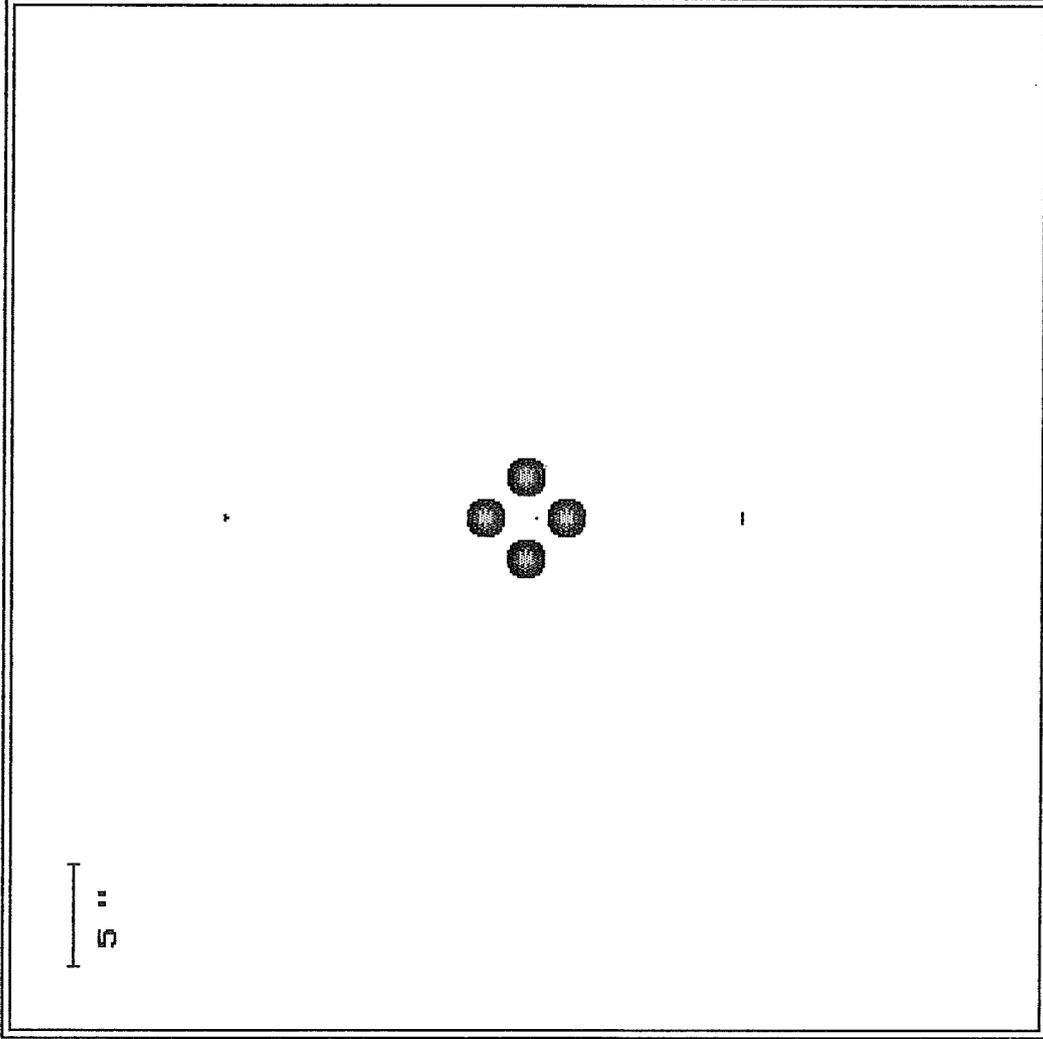
Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4

Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4

Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

ABELL 370

Nous avons tenté de retrouver , par notre simulation , le premier arc géant découvert par G. Soucaïl , Y. Mellier , B. Fort , G. Mathez et J.P. Picard de l'observatoire de Midi-Pyrénées de Toulouse .

La découverte de cet arc géant , le premier du genre , a été annoncé en 1986 .

La photographie , à droite de la simulation , a été prise en 1987 grâce au télescope franco-canadien de 3,60 mètres (C.F.H.T. : Canadian France Hawai Telescop) .

Cet observatoire astronomique , situé sur le sommet du Mauna Kea , à 4200 mètres d'altitude , dans l'archipel hawaïen , bénéficie de conditions exceptionnelles d'observations .

Afin de s'approcher de la configuration observée , nous avons pris les paramètres suivants :

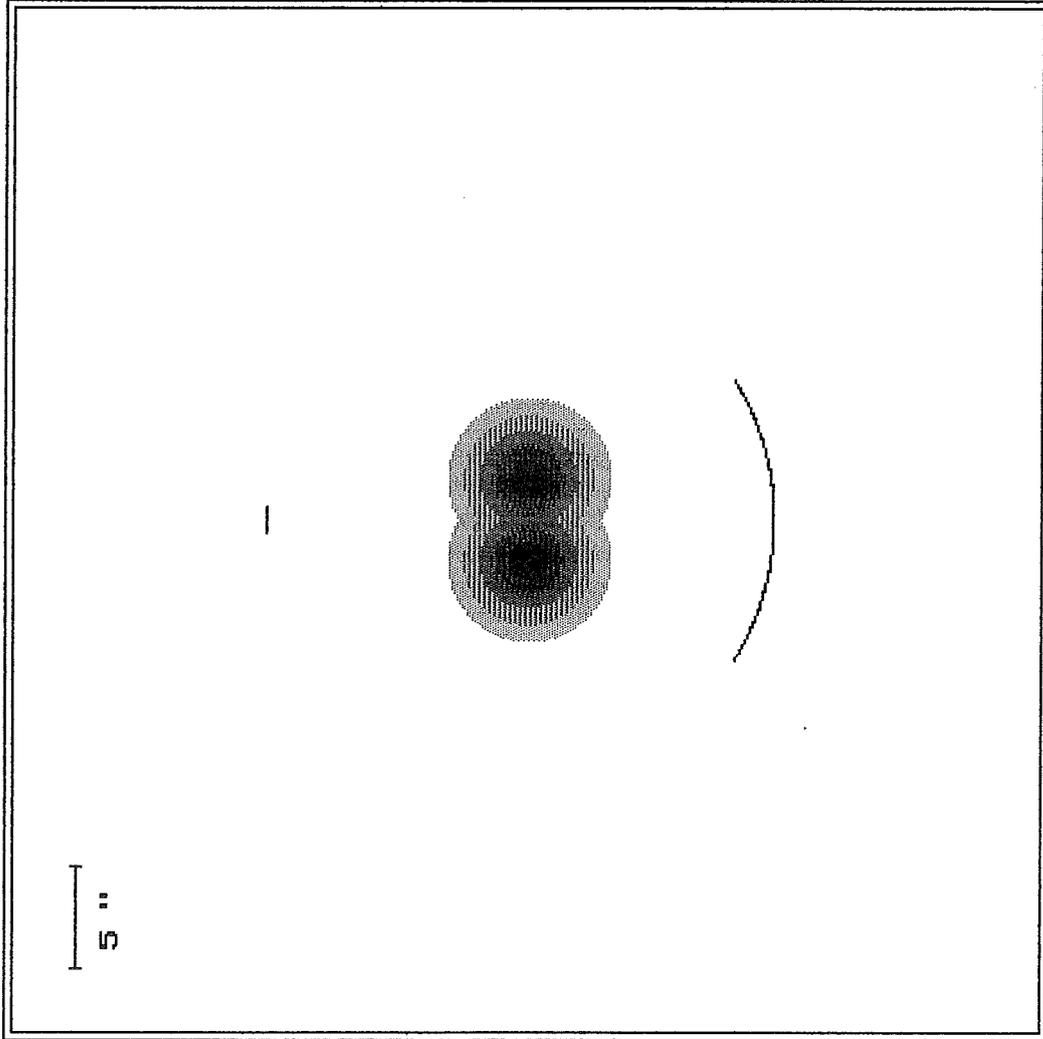
- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 source
- Nombres de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Distance séparant les 2 galaxies : 4 secondes d'arc
- Situation de la source : 1 seconde d'arc au-dessus des deux galaxies , dans l'axe

Nous avons retrouvé , dans notre simulation , un grand arc étendu au-dessous des galaxies défectrices . Cet arc étendu , que nous avons déjà remarqué dans le chapitre sur les exemples d'application , est la réunion de trois arcs fusionnant en un seul .

Nous retrouvons , également , un deuxième mirage situé au-dessus des galaxies défectrices . Cet arc n'est pas visible sur la photo .

Par contre , nous ne retrouvons pas au centre la troisième image , en fait la cinquième de cette configuration de simulation . Nous estimons cette anomalie à un défaut d'itération .

Bien que le mirage gravitationnel soit produit par tout l'amas , nous pouvons remarquer qu'une galaxie , située au-dessus de l'arc géant sur la photo correspond à notre position de galaxie dans la simulation .



Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

CROIX D'EINSTEIN : 2237 + 0305

Nous avons tenté ici de retrouver cette croix d'Einstein , autre configuration observée de mirages gravitationnels .

Edward Horne , puis John Huchra découvrirent qu'un quasar se trouvait exactement au centre d'une galaxie , en 1984 . La puissance du télescope franco-canadien permit , dans les années qui suivirent , de déceler quatre images parfaitement identiques du quasar , situées aux sommets d'une croix .

L'image , à droite de la simulation , prise donc au C.F.H.T. , comporte cinq points lumineux .

Quatre de ces points représentent les quatre sources virtuelles d'un quasar , dont les rayons lumineux ont été déviés par la masse de la galaxie . Le cinquième point représente le noyau de cette galaxie .

Sur cette image , nous devrions voir le cinquième mirage du quasar , quasiment confondu avec le noyau de la galaxie . L'intensité du mirage central étant liée au rayon de coeur de la galaxie , il est quasiment invisible , ce qui nous permet de dire que le rayon de coeur de la galaxie est très petit . Le potentiel se rapproche ainsi de celui d'une masse ponctuelle .

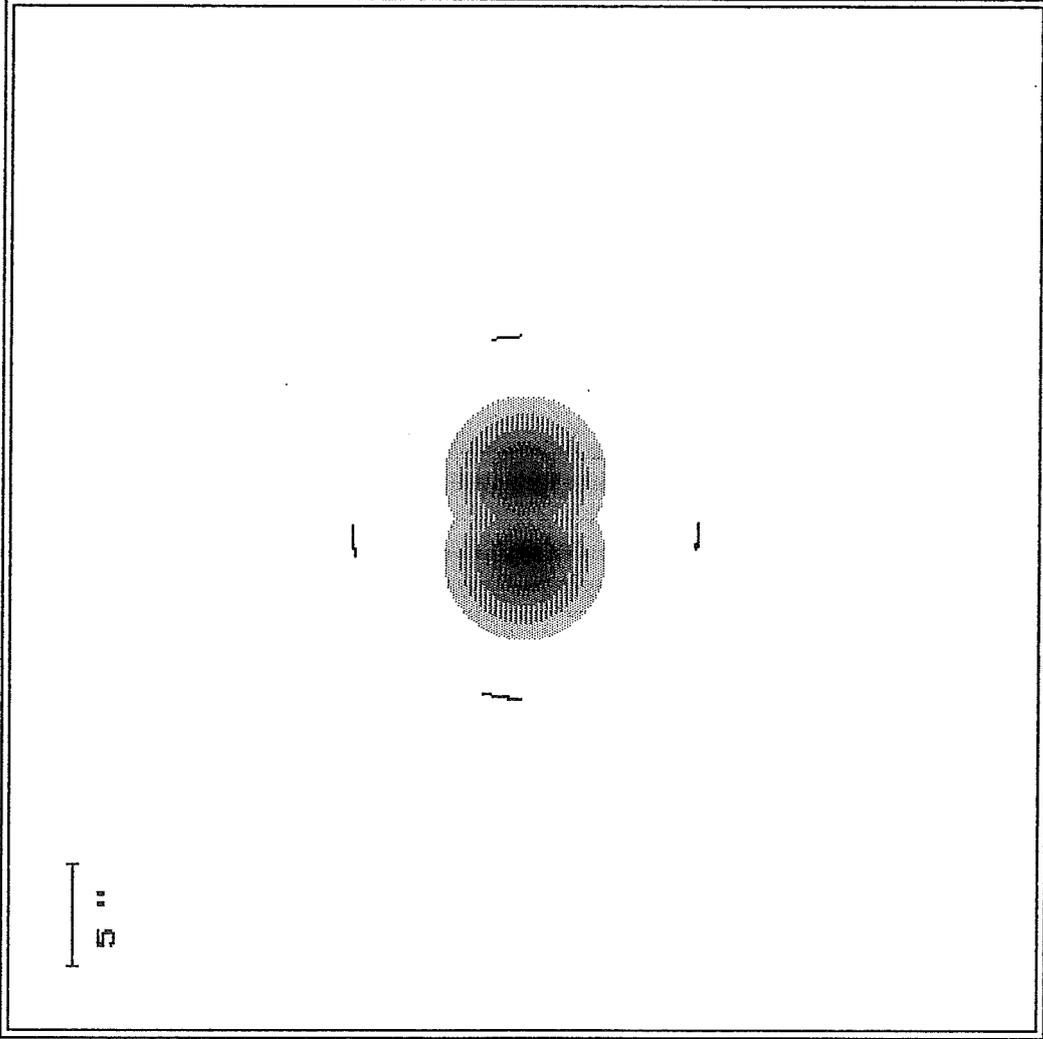
Afin de s'approcher de la configuration observée , nous avons pris les paramètres suivants :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 source
- Nombres de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 9.500 et 10.500 milliards de masses solaires
- Distance séparant les 2 galaxies : 4 secondes d'arc
- Situation de la source : 0.1 seconde d'arc au-dessous des deux galaxies

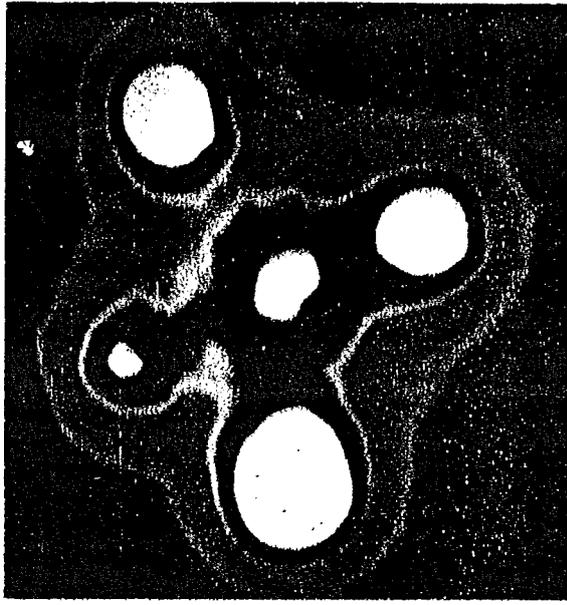
Nous avons donc retrouvé , dans notre simulation , les quatre mirages , que nous observions sur la photographie .

Au centre , nous ne retrouvons pas la cinquième image , probablement à cause d'un défaut d'itération ou d'une dimension trop petite du rayon de coeur .

Nous avons dû donner , pour retrouver cette croix d'Einstein légèrement déformée , des masses aux galaxies sensiblement différentes . Nous pouvons remarquer qu'une différence d'uniquement 10 % suffit à occasionner une déformation très notable de la position des arcs gravitationnels .



Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

AUTRE OBSERVATION

L'image , à droite de la simulation , comporte quatre mirages gravitationnels .

En effet , trois de ces mirages ont la forme de petits arcs et sont situés en bas de l'image. De même , nous observons un quatrième arc situé en haut de l'image , moins étendu que les trois autres . Entre les deux groupes de mirages existent de nombreux points lumineux, représentant des galaxies formant l'amas et constituant la lentille gravitationnelle .

Afin de s'approcher de la configuration observée , nous avons pris les paramètres suivants :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 source
- Nombres de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Distance séparant les 2 galaxies : 4 secondes d'arc
- Situation de la source : 0.5 seconde d'arc au-dessous des deux galaxies

Nous retrouvons une configuration quasiment identique pour la position des mirages .

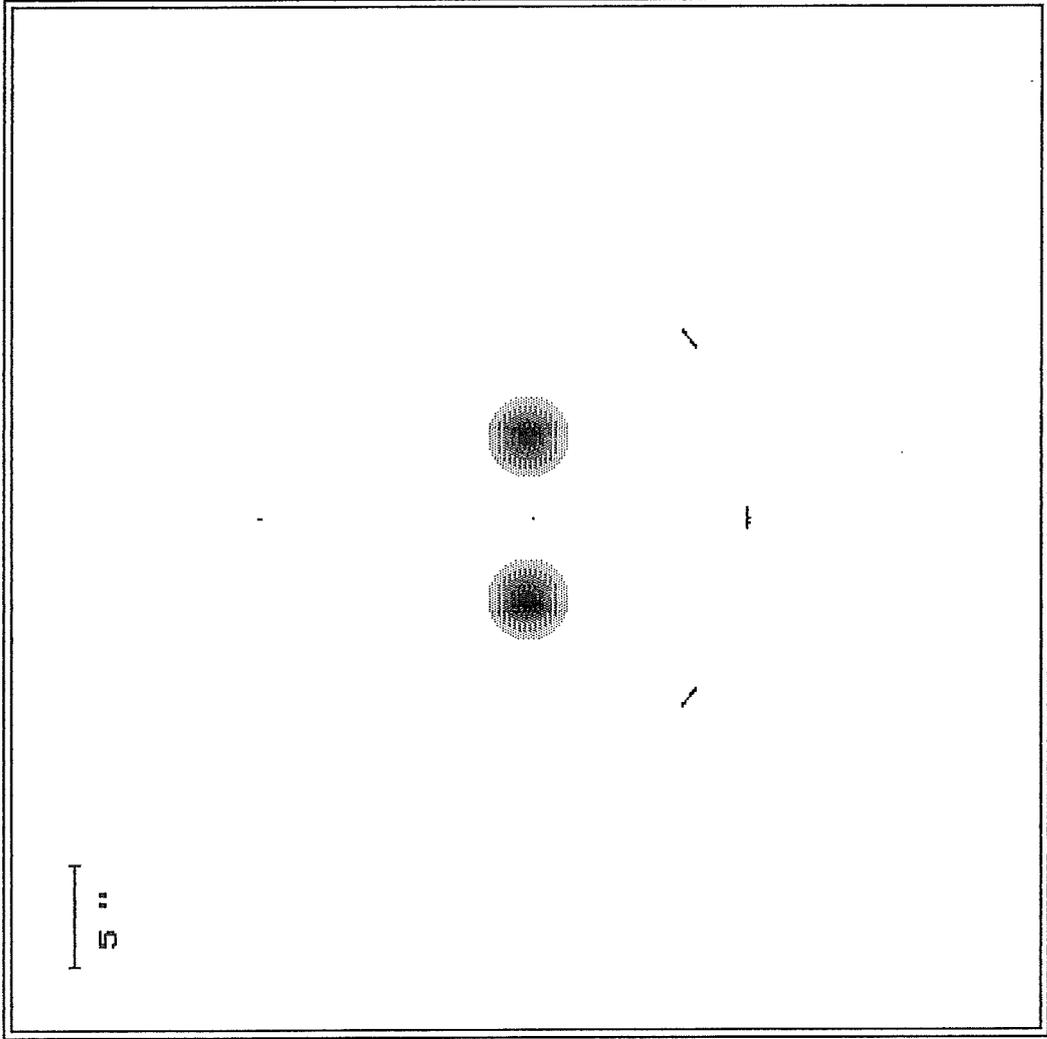
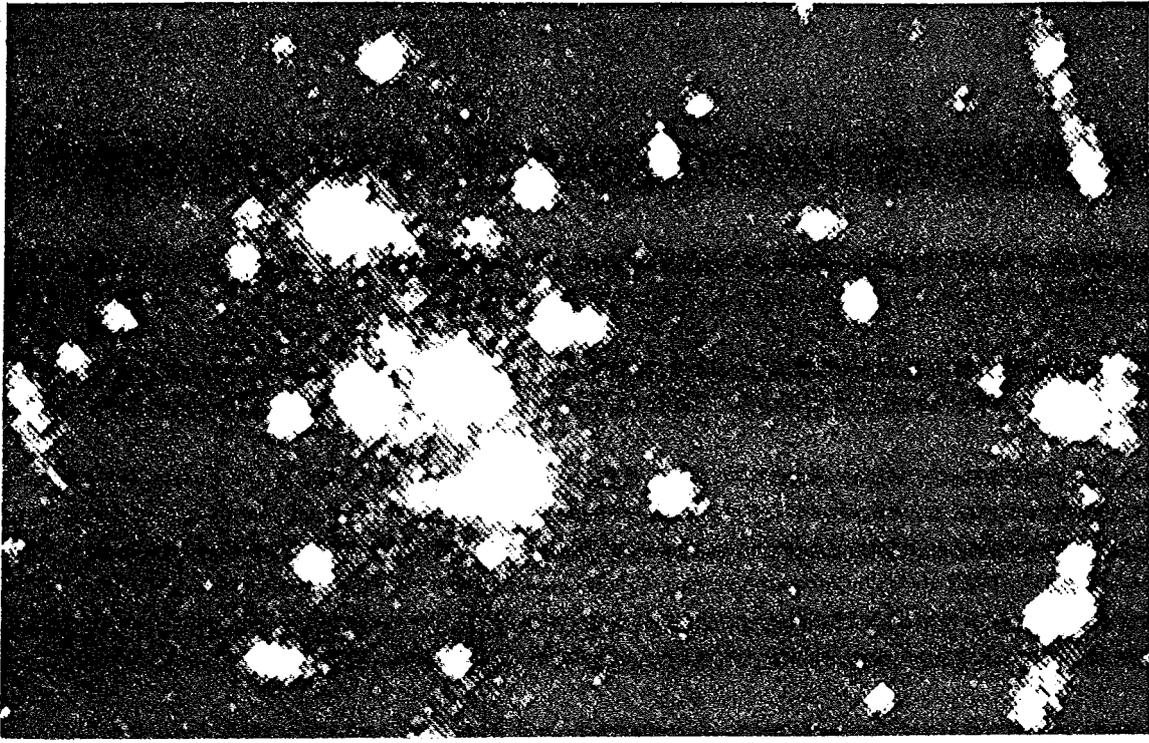
Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que l'étendue des trois arcs situés au-dessous des deux galaxies défectrices sont moins étendus que sur la photographie . Ils sont moins épais et moins larges .

L'épaisseur des arcs est généralement liée à l'étendue de la source . Nous devons donc avoir , dans le cas de notre photographie , une source assez étendue .

La quatrième image , au-dessus des deux galaxies défectrices , est quasiment ponctuelle dans notre simulation , alors qu'elle constitue un véritable arc sur la photographie .

Sur le dessin issu de notre calcul , nous retrouvons la cinquième image , située entre les deux galaxies . Cette image permet de retrouver la propriété de non-parité du nombre de mirages gravitationnels .

Si nous observons notre photographie , nous pouvons remarquer que les mirages gravitationnels sont quasiment symétriques . La répartition de masse dans l'amas est donc parfaitement symétrique , et le potentiel gravitationnel à l'intérieur de l'amas peut alors s'apparenter à un potentiel elliptique , ce qui correspond à la présence de deux galaxies de masses identiques .



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

VI. APPLICATIONS GENERALES

Nous avons vu , dans les chapitres précédents , que l'optique gravitationnelle était un domaine en pleine expansion à l'heure actuelle .

Devenue une discipline à part entière , l'optique gravitationnelle est un formidable outil d'investigation en astrophysique et en cosmologie .

Peut-être pourrions-nous comparer le développement de cette optique d'un nouveau genre aux travaux de Newton puis Fraunhofer qui conduisirent au perfectionnement du spectrographe . Cet outil , depuis son invention , est toujours considéré comme le plus formidable outil de l'astronome .

Tout à tour moyen de détermination de compositions chimiques , de densités ou de vitesses , le spectrographe reste le premier instrument à installer sur un télescope .

L'utilisation de ces mirages exotiques que sont les mirages gravitationnels permet , comme le spectrographe dans son domaine , de parvenir à la mesure de certains paramètres inconnus dont la mesure était jusqu'à présent impossible de manière rigoureuse .

La première application de l'optique gravitationnelle est la détermination de la masse de l'objet céleste déviant le rayon lumineux .

Nous avons vu , dans le premier exemple de la déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil , que l'angle donnant cette déviation était proportionnelle à la masse , si nous nous plaçons dans certaines approximations .

Connaissant donc l'étendue des mirages , leurs formes , nous sommes en mesure de revenir à la distribution de masse à l'intérieur de l'amas .

Très vite , l'observation des premiers mirages gravitationnels a montré que la masse que nous pensions être celle d'une galaxie ou d'un amas était sous-évaluée . L'étendue de ces arcs nous renseignent ainsi sur la masse totale de la galaxie ou de l'amas , mais aussi sur la densité de la matière invisible , dont l'importance des mirages qu'elle produit trahit l'existence .

Une autre application des lentilles gravitationnelles semble beaucoup intéresser les cosmologues . En effet , les photons , s'ils sont issus d'une même source au même instant , suivent des parcours très différents lorsqu'ils n'apparaissent pas sur le même mirage . Ainsi , chacun ayant suivi un parcours différent , un photon arrivera en retard par rapport à son homologue , pourtant émis au même instant . La mesure de ce retard permettra de déterminer la distance parcourue en plus de ce photon .

Connaissant cette distance , il est alors possible d'estimer la courbure de l'univers à grande échelle , où d'extrapoler certains paramètres astrophysiques comme la constante de Hubble , donnant la distance qui nous sépare d'un objet d'après la vitesse à laquelle il s'éloigne de nous .

En conclusion , l'optique gravitationnelle constitue un nouveau domaine de l'astrophysique qui se développera sans doute dans les années à venir . Le perfectionnement des méthodes de modélisation et la mise en service de télescopes géants parviendront probablement , au cours de la prochaine décennie , à la découverte de nombreux mirages très lointains . Le rêve de Zwicky , cherchant à utiliser les lentilles gravitationnelles comme télescope , est sur le point de devenir réalité ... soixante-dix ans après ses prédictions .

ANNEXES

1) La précession de périhélie

Les planètes ayant une orbite très proche d'une ellipse, la position la plus proche du Soleil atteinte par une planète sur son orbite est appelée la périhélie.

Ce point de plus courte approche voit sa position fluctuer au cours du temps, on dit alors que ce point subit un mouvement de précession, d'où le terme de précession de périhélie.

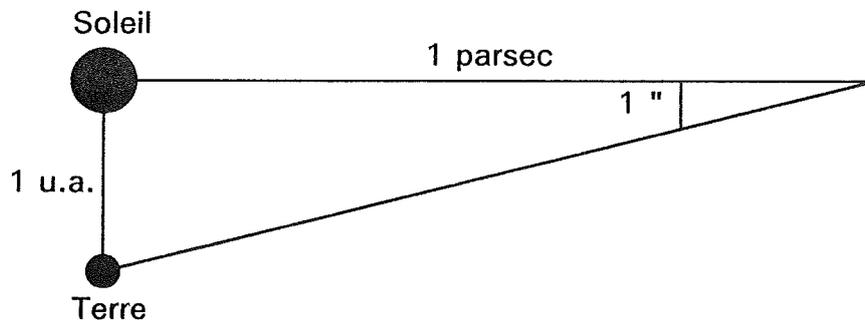
2) Le parsec

Le parsec est probablement l'unité de distance la plus utilisée en astrophysique.

Son origine remonte aux premiers calculs de distances parallaxiques pour déterminer la distance nous séparant des étoiles les plus proches.

La définition du parsec est la suivante :

" Le parsec est la distance séparant un observateur du Soleil où la distance Terre-Soleil apparaît comme un écart angulaire de 1 seconde d'arc, soit $4.86 \cdot 10^{-6}$ radians . "



Comme 1 unité astronomique est égale à 149.6 millions de kilomètres, nous avons :

$$\frac{1 \text{ u.a.}}{1 \text{ parsec}} = \tan(1'')$$

Ou encore :

$$1 \text{ parsec} = \frac{149.6 \cdot 10^9}{\tan(4.86 \cdot 10^{-6})} = 3.078 \cdot 10^{16} \text{ mètres}$$

Comme une année-lumière est la distance parcourue par la lumière en une année, nous avons :

1 année lumière = $9.46 \cdot 10^{15}$ mètres

Ce qui nous permet de déterminer la valeur du parsec en année-lumière :

1 parsec = 3.26 années-lumière

3) La galaxie

La galaxie est un ensemble d'étoiles , réparties généralement sur un disque plat .

Les formes des galaxies sont très diverses ; il existe des galaxies spirales où les étoiles se répartissent préférentiellement dans les bras spiraux , d'autres sont elliptiques dont la forme rappelle souvent le ballon de rugby , certaines ont des contours irréguliers ...

Les galaxies sont donc composées d'étoiles , des centaines voire des milliers de milliards d'étoiles . Elles sont également composées de très grandes masses de gaz interstellaires , contribuant d'une manière non négligeable à la masse de la galaxie . Les galaxies possèdent aussi un halo , très étendu , bien au delà de la frontière visible de la galaxie .

Les masses des galaxies , ces dernières années , ont dû être révisées à la hausse , les mirages gravitationnels observés montrant que la masse des galaxies était largement sous-évaluée , d'un facteur entre 10 et 100 .

4) Le quasar

Le mot " quasar " est la contraction anglaise de l'expression " quasi stellar astronomical radio source " .

Les quasars sont les objets les plus distants que nous observons actuellement , et sont généralement situés à des distances supérieures au Gigaparsec (un milliard de parsecs) . Ces distances ont été déduites à partir de leurs spectres , très décalés vers le rouge .

Leur nature , à l'heure actuelle , n'est pas clairement définie . Cependant , l'hypothèse la plus fiable consisterait à penser que les quasars sont des noyaux très actifs de galaxies , dont la formidable éjection d'énergie serait due à la présence d'un trou noir super-massif .

Généralement observés dans le domaine radio , les quasars envoient de la matière dans deux directions diamétralement opposées . Cette matière est éjectée hors du quasar à une vitesse proche de la vitesse de la lumière .

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Ouvrages de relativité générale :

- **Gravitation and Cosmology** de Steven Weinberg (Wiley)
- **Relativité générale et gravitation** de Edgard Elbaz (Ellipses)
- **Electromagnétisme et gravitation relativistes** de Jean-Claude Boudenot (Ellipses)
- **Relativité et gravitation** de Philippe Tourenc (Armand Colin)
- **Relativité et quantification** de José-Philippe Perez (Masson)
- **Théorie des champs** de L. Landau & E. Lifchitz (Mir)

Ouvrages d'optique et d'astrophysique :

- **Introduction aux phénomènes optiques** de Pierre Léna (InterEditions)
- **Galaxies et cosmologie** de F. Combes , P. Boissé , A. Mazure et A. Blanchard (InterEditions)

Articles scientifiques :

- **Gravitational lenses** de R. Blandford & C. Kochanek (? 1986)
- **Quasars multiples et mirages gravitationnels** de C. Vanderriest (Courrier du C.N.R.S. Images de la physique 1986)
- **Des mirages gravitationnels originaux** de L. Nottale (Courrier du C.N.R.S. Images de la physique 1988)
- **Mesure du décalage temporel entre les deux images d'un mirage gravitationnel** de C. Vanderriest , J. Schneider , G. Herpe , M. Chevreton et G. Wlérick (Courrier du C.N.R.S. Images de la physique 1989)
- **Les lentilles gravitationnelles** de Edwin Turner (Pour la science 1988)

Thèse :

- **Distribution de matière dans les amas de galaxies déduite de l'optique gravitationnelle** de Jean-Paul Kneib (Observatoire de Midi-Pyrénées de Toulouse 1993)