

LES LENTILLES GRAVITATIONNELLES

TRAVAIL

réalisé par Emmanuel QUEMENER

Projet personnel
entrant dans le cadre de l'unité de valeur de maîtrise UM 10

Directeurs de projet : Pierre-Yves Longaretti (Observatoire de Grenoble)
Yannick Mellier (Observatoire de Midi-Pyrénées de Toulouse)

Responsable de l'unité : Lucien Touzillier (Université Paul Sabatier de Toulouse)

I. INTRODUCTION

C'est en 1905 qu'Albert Einstein publie un de ses travaux en cours : " Sur l'électrodynamique des corps en mouvement ". Derrière ce titre très hermétique pour le néophyte , se cachait la théorie qui allait déchaîner les passions , tant au sein d'une communauté scientifique souvent très peu objective qu'aux yeux d'un vaste public , curieux , en ce début du vingtième siècle , des développements les plus récents des systèmes du monde . La relativité restreinte était née , avec son cortège de paradoxes , obligeant chacun des courageux s'y aventurant à oublier ses " réflexes " de la mécanique newtonienne .

Novatrice dans de nombreux domaines , la relativité dans sa version restreinte ne changeait pas radicalement notre vision de l'univers . Certes , elle expliquait certaines expériences passées de manière élégante , comme par exemple celle de Fizeau , ou encore celle qui enterra à jamais le vent d'éther , ce support de propagation de la lumière , dans la célèbre manipulation de Michelson et Morley .

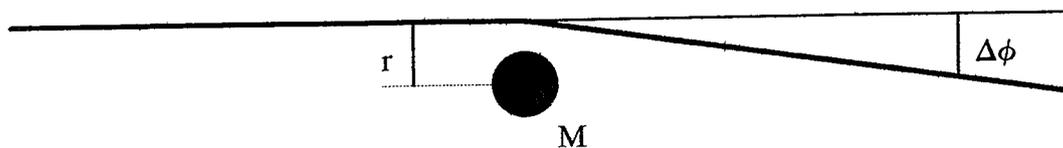
Il manquait cependant la gravitation dans cette théorie de la relativité . Cette gravitation introduite par Isaac Newton expliquait le mouvement des planètes comme le mélange subtil de deux forces , dont une - la force centrifuge - tendait à éloigner les deux corps , alors que l'autre - l'attraction universelle - tendait à les rapprocher , sans qu'aucune tige ni sphère ne soit présente , comme l'avait par exemple pensé l'un de ses prédécesseurs Johannes Kepler .

En 1916 , Albert Einstein publie ses dernières investigations dans ce domaine jusque là inexploité de la relativité : " Les fondements de la théorie de la relativité générale " . Dans ce dernier article , il n'oublie pas la gravitation et propose quelques tests susceptibles d'être vérifiés expérimentalement .

Le premier test qu'il expose concerne la **précession de périhélie** de Mercure . Au dix-neuvième siècle , Le Verrier découvrait que l'orbite de Mercure , la planète la plus proche du Soleil , ne correspondait pas aux calculs théoriques ; en effet , la planète possédait une avance de périhélie anormale , qui ne correspondait pas au calcul des perturbations tenant compte de l'influence de chacune des planètes connues ; l'origine de cette singularité ne pouvait donc venir , selon lui , que de la présence d'un autre corps , une autre planète inconnue ... Mais les observations ne confirmèrent pas ce résultat ... Einstein propose alors un calcul dérivé de ses équations et démontre que la proximité de Mercure du Soleil est responsable de cette anomalie de précession de périhélie ; le champ gravitationnel occasionné par le Soleil et les autres planètes n'est pas conforme à la définition du champ de Newton ; le Soleil " courbe " l'espace temps .

Malgré cela , le calcul d'Einstein ne démontre pas la validité de sa théorie ; il suffit , en effet , de supposer que le Soleil possède une forme ellipsoïdale pour que cette anomalie de précession apparaisse , en utilisant simplement la mécanique newtonienne ... et de nombreux calculs , dont la base est la méthode des perturbations dérivée des travaux de Laplace .

Le second test va par contre sonner le glas de la théorie de Newton et devenir dès lors la première vérification à posteriori de la théorie d'Einstein ; il s'agit de la **déviaton des rayons lumineux** au voisinage d'un objet massif .



Un rayon lumineux passe au voisinage d'un objet de masse M avec une distance minimale d'approche r . La masse M dévie le rayon lumineux suivant un angle $\Delta\phi$.

En utilisant la mécanique newtonienne, l'angle de déviation $\Delta\phi$ est tel que :

$$\Delta\phi = - \frac{2GM}{rc^2}$$

Par un calcul analogue en mécanique relativiste, l'angle de déviation $\Delta\phi$ devient :

$$\Delta\phi = - \frac{4GM}{rc^2}$$

- où :
- $\Delta\phi$ est l'angle de déviation du rayon lumineux
 - G est la constante de gravitation universelle
 - M est la masse de l'objet
 - r est la distance de plus courte approche
 - c est la vitesse de la lumière dans le vide

La **théorie relativiste** de la déviation du rayon lumineux prévoit un **angle double** de celui issu de la **théorie classique**.

En connaissant la masse de l'objet et la distance de plus courte approche des photons de la masse, il est possible de calculer l'angle de déviation, lequel pourra, le cas échéant, être comparé à une valeur expérimentale.

Cette expérience a été réalisée pour la première fois le 29 mai 1919 par une équipe dirigée par Eddington, lors d'une éclipse totale du Soleil, simultanément à Sobral et sur l'île Principe. La Lune qui cachait le Soleil permit de prendre des photographies du ciel étoilé : en rapportant les photos prises pendant l'éclipse à celles prises sans le Soleil six mois plus tard, un léger déplacement des étoiles fut observé. La meilleure mesure expérimentale à ce jour donne un angle de déviation de 1.761 secondes d'arc pour un rayon lumineux rasant la surface du Soleil. La théorie prévoyant un angle de déviation de 1.75 secondes d'arc : l'accord est donc presque parfait.

Mais la probabilité d'observer un mirage gravitationnel stellaire est très faible. Il est, en effet, fort peu probable qu'une étoile se trouve exactement sur la même ligne de visée que nous ; les astrophysiciens " boudèrent " pendant quelques décennies cette déviation des rayons lumineux au voisinage d'un objet massif, considérant cette expérience comme uniquement un test classique de la relativité générale, et ne pensant pas un instant l'appliquer à un autre exemple que le Soleil.

" Le problème en question , cependant , prend un aspect radicalement différent si nous pensons , non pas en termes d'étoiles , mais en termes de nébuleuses extragalactiques . A condition que nos estimations actuelles de la masse des nébuleuses soient correctes , la probabilité , pour que ces nébuleuses qui agissent comme des lentilles gravitationnelles , soient trouvées , devient pratiquement une certitude . "

Zwicky (1937)

Pendant ces 40 années qui suivirent la vérification d'Eddington de la théorie de la relativité générale , peu de chercheurs s'intéressèrent à ce nouveau domaine que constituait l'optique gravitationnelle . La meilleure initiative en ce sens fut celle de Zwicky qui proposa dès 1937 une application aux nébuleuses extragalactiques (depuis Edwin Hubble et son expansion de l'univers) . Malgré une discussion d'Einstein en 1936 sur l'effet de lentille gravitationnelle , aucune recherche visant à découvrir ces mirages d'un nouveau genre ne fut entreprise ...

Il faut attendre les années soixante avant que les premiers formalismes ne se développent , sous la plume de Refsdal et Barnothy , puis au début des années soixante-dix avec Bourassa , Gunn , Kantowski , Norton et Press ... En 1979 , Walsh , Carswell et Weynman découvrent le premier mirage gravitationnel , celui d'un quasar . On donna , comme le veut la tradition , à ce mirage un nom - fort peu poétique d'ailleurs - : 0957 + 561 .

Les années suivantes furent très fécondes , notamment la découverte du premier arc gravitationnel par G. Soucail , Y. Mellier , B. Fort , G. Mathez et J.P. Picard , de l'observatoire du Pic du Midi de Toulouse , en 1986 . Les développements théoriques se succédèrent , dopés par les récentes observations , grâce à Blandford , Kochanek et Narayan .

En 1993 , de nombreux mirages gravitationnels ont déjà été découverts , sous des formes très diverses comme de véritables arcs très étendus , de simples arclets et des croix portant chacun le nom de l'homme qui en a montré implicitement l'existence , Einstein .

Nous allons donc , dans les chapitres suivants , exposer tour à tour :

- quelques notions sur la théorie de la relativité générale
- la déviation des rayons lumineux en mécanique newtonienne et relativiste
- l'optique gravitationnelle
- la modélisation d'une lentille gravitationnelle
- quelques exemples d'application
- les applications de l'optique gravitationnelle .

II. PRINCIPE D'EQUIVALENCE

1) Rappels de relativité restreinte

Postulat de la relativité restreinte , énoncé par Einstein en 1905 :

" Toutes les lois physiques sont invariantes par changement de référentiels galiléens . "

Ainsi , lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre , les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme doivent posséder les mêmes formes . Dès lors , la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide doit toujours être égale à 299792250 mètres par secondes .

Ce postulat , bien qu'intuitivement exact , devient un véritable paradoxe lorsque l'objet considéré se déplace à une vitesse proche de celle de la lumière . La loi des transformations des vitesses de Galilée devient obsolète car un objet en mouvement dans ce référentiel peut posséder une vitesse supérieure à celle de la lumière , ce qui est impossible d'après le postulat d'Einstein . Pour pallier cette difficulté , Lorentz propose , avant Einstein , une transformation de coordonnées dans laquelle les vitesses de la lumière dans le vide des deux référentiels sont identiques , transformation généralisant celle de Galilée pour les faibles vitesses .

Ce postulat de la relativité restreinte contient également un concept très important , celui de l'invariance de l'intervalle entre deux événements , qu'ils soient infiniment voisins ou pas . De cette propriété proviennent deux phénomènes très exotiques qui ont donné à la relativité toute sa popularité : la contraction des longueurs et la dilatation des durées dont le paradoxe des jumeaux d'Einstein est sans doute l'illustration la plus célèbre .

Cet intervalle introduit également le concept d'espace-temps dans un univers où le temps devient une variable de même nature que les trois dimensions spatiales . Le temps n'est plus immuable ; il dépend désormais de l'espace dans lequel il intervient . L'espace de travail possède dès lors non plus trois mais quatre dimensions , corrélées entre elles .

En utilisant les notations tensorielles , il est aisé de représenter cet intervalle , appelé temps propre et exprimé généralement au carré :

$$d\tau^2 = - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta}$$

- où
- $d\tau$ est le temps propre
 - $\eta_{\alpha\beta}$ est un tenseur
 - ξ^{α} et ξ^{β} sont les coordonnées
 - α et β sont des indices muets

En utilisant les notations d'Einstein , le temps propre devient :

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta}$$

2) Principe d'équivalence

Ce principe, énoncé par Einstein dans sa théorie de la relativité générale, possède un axiome : les masses inertielle et gravitationnelle sont identiques. Autrement dit, quand un objet est en chute libre, le champ d'accélération devient identique au champ de gravitation, ceci indépendamment de la masse du corps qui tombe. Galilée avait déjà énoncé une remarque similaire en se basant sur la chute de corps du haut de la tour de Pise. Mais comment se fait-il qu'un corps tombe indépendamment de sa masse alors que s'il chute, c'est justement à cause de sa masse (et du champ de gravitation) ?

Le principe d'équivalence est basé sur l'expérience de pensée suivante : un observateur se trouve dans une cabine d'ascenseur, sur Terre, isolé de l'extérieur. Il emporte avec lui différents objets. Lorsqu'il lâche ces objets, ceux-ci tombent vers le sol, étant soumis au champ de gravitation de la Terre.

Si l'ascenseur tombe maintenant en chute libre, ces objets que lâchait l'observateur ne tombent plus ; l'observateur n'est plus en mesure de dire si un champ de gravitation existe ou pas. Tout se passe, du point de vue de l'ascenseur, comme s'il n'y avait plus de gravitation, alors qu'elle existe bel et bien.

A la suite de cet exemple très scolaire, il est alors possible d'énoncer ce principe d'équivalence, base de la relativité générale :

" En n'importe quel point de l'espace temps, il est possible de choisir un système de référence inertiel local de sorte que dans une région suffisamment petite autour de ce point les lois de la nature prennent la même forme que dans un système cartésien sans accélération en l'absence de gravitation. "

3) Equation du mouvement d'une particule

Soit une particule libre, soumise à l'action d'un champ de gravitation.

Selon le principe d'équivalence, il existe un système de coordonnées ξ^α en chute libre où l'équation du mouvement est une ligne droite dans l'espace temps :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

Maintenant, soit un système de coordonnées cartésiennes x^μ liées au laboratoire.

Il existe une relation différentielle entre ξ^α , x^μ et $d\tau$:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}, \text{ en notations d'Einstein}$$

Alors :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)$$

Comme :

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$$

On obtient alors :

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

En multipliant scalairement par $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, on obtient :

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Comme $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^{\lambda\mu}$, on a :

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \delta^{\lambda\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

En simplifiant, on obtient enfin :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

On en déduit finalement l'équation du mouvement de la particule :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

où $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ est le symbole de Christoffel : $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$

Comme $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu$, on peut définir un nouveau tenseur $g_{\mu\nu}$ tel que :

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

et $g_{\mu\nu} = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$

Pour un photon ou un neutrino (si on considère que le neutrino possède une masse nulle), la variable indépendante ne peut être le temps propre $d\tau$ (le temps propre $d\tau$ est en effet nul pour des particules se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le vide, donc de masse nulle).

Il suffit donc, pour un photon ou un neutrino, de remplacer la variable par une variable arbitraire en rappelant que le temps propre est nul.

Il reste maintenant à établir la relation entre le tenseur définissant la métrique utilisée $g_{\mu\nu}$ et le symbole de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

Le traitement des particules en chute libre a montré que le champ qui détermine la force gravitationnelle est dépendant du symbole de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ et que l'intervalle de temps propre entre deux événements $d\tau$ est donnée par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$.

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est défini par : $g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$

Une dérivation suivant x^λ donne :
$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

Le symbole de Christoffel était défini par :
$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \text{ ou } \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}$$

On obtient , après identification :
$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}$$

Puis , finalement :
$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}$$

Si on additionne à l'équation précédente la même équation avec les symboles μ et λ interchangés , puis si on retranche la même équation avec ν et λ interchangés , on obtient :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + g_{\kappa\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa + g_{\kappa\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa - g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - g_{\kappa\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa$$

Comme le symbole de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$ et le tenseur de la métrique $g_{\mu\nu}$ sont symétriques , par permutation des indices μ et ν , on obtient le résultat très simple :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2 g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa$$

En définissant une matrice $g^{\nu\sigma}$, inverse de $g_{\nu\sigma}$, comme $g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\sigma$, on obtient :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right)$$

4) Retour à la mécanique newtonienne

Pour reprendre contact avec la théorie de Newton , certains paramètres issus de l'application du principe d'équivalence doivent être " approximés " ; la particule considérée se déplace dans un champ gravitationnel faible . Si la particule est suffisamment lente , le terme en $\frac{dx}{d\tau}$ peut être négligé comparé au terme $\frac{dt}{d\tau}$.

On peut alors écrire que :
$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0$$

De plus , comme le champ gravitationnel est stationnaire , toutes les dérivées temporelles de $g_{\mu\nu}$ disparaissent ; par conséquent :

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$$

Finalement , comme le champ gravitationnel est faible , on peut adopter un système proche des coordonnées cartésiennes : $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, avec $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$.

Comme $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$, on obtient : $\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\eta_{00} + h_{00})$

Au premier ordre en $h_{\alpha\beta}$, on obtient : $\Gamma_{00}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}$

Il reste alors à résoudre les deux équations : $\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} = 0$ et $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$

La seconde équation a pour solution : $\frac{dt}{d\tau} = \text{constante}$. En divisant la première équation par $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$, on trouve alors : $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}$

Le résultat correspondant en mécanique newtonienne est : $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\nabla\phi$, où ϕ est le potentiel gravitationnel , à une distance r du centre de masse du corps de masse M , d'expression : $\phi = -\frac{GM}{r}$

En comparant les deux équations du mouvement , on peut conclure que :

$$h_{00} = -2\phi + \text{constante}$$

Comme le système de coordonnées doit devenir minkowskien à grandes distances , le terme h_{00} doit disparaître à grandes distances . On choisit alors h_{00} tel que : $h_{00} = -2\phi$.

En retournant à la métrique et en se plaçant dans un système d'unités internationales , on trouve que :

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$$

Cette approximation de champ faible et stationnaire va être très utile quand sera abordée la déflexion gravitationnelle au voisinage d'un objet massif .

III. DEVIATION DES RAYONS LUMINEUX

Nous avons vu , dans le chapitre d'introduction , que la déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil avait permis de mettre en défaut la théorie de Newton face à la théorie d'Einstein .

Nous allons donc , dans un premier temps , exposer la vision newtonienne de la déviation des rayons lumineux , puis , dans une seconde partie , nous traiterons cette déviation dans le cadre de la relativité générale , et nous verrons apparaître leurs différences .

1) Déviation en mécanique newtonienne

Inventeur de la force d'attraction gravitationnelle , Isaac Newton pose les premières pierres d'une nouvelle branche de la mécanique , la dynamique .

Son principe se compose de trois lois que nous pouvons énoncer comme suit :

Première loi : Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme , sauf si les forces imprimées le contraignent d'en changer .

Deuxième loi : Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée , et s'effectue suivant la droite par laquelle cette force est imprimée .

Troisième loi : La réaction est toujours contraire à l'action ou encore les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens contraire .

Généralement , le principe fondamental de la dynamique est enseigné comme étant seulement la seconde loi de Newton ; c'est en effet ce que nous utiliserons pour parvenir à la déviation de rayons lumineux au voisinage d'un objet massif .

Nous prendrons comme expression de cette deuxième loi de Newton appliquée à un photon de masse nulle l'expression suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

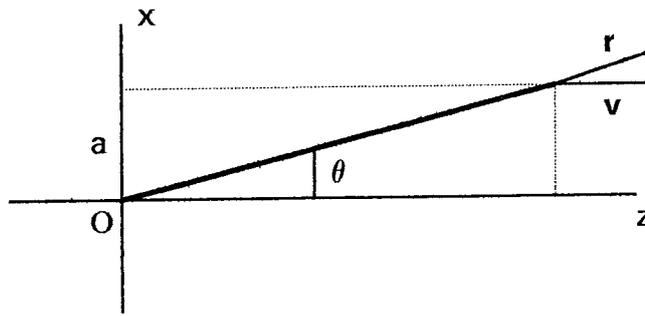
\vec{f} est la force d'attraction gravitationnelle , dérivant du potentiel : $\phi = -\frac{GM}{r}$

L'expression de cette force \vec{f} sera donc : $\vec{f} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}$

Nous en déduisons l'expression vectorielle suivante : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}$

Considérons la configuration suivante pour notre problème :





Nous supposons que le pinceau de photons est situé dans le plan xOz .

Projetons chacun des vecteurs , le vecteur vitesse v et le vecteur position r sur les trois axes du repère cartésien .

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMx}{r^3} \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{GMy}{r^3} \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{GMz}{r^3}$$

Le vecteur r est défini par : $\vec{r} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z = r\cos\theta\vec{e}_z + r\sin\theta\vec{e}_x$

Comme le pinceau de photons est situé dans le plan xOz , nous avons :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMrsin\theta}{r^3} \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{GMrcos\theta}{r^3}$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous avons : $\vec{r} = a\vec{e}_x$

Le terme a représente rigoureusement la distance de plus courte approche . Généralement , comme nous le verrons plus loin , les angles sont si faibles qu'en première approximation , le terme a représente le paramètre d'impact utilisé dans toutes les diffusions élastiques , comme dans la diffusion de Rutherford .

Nous en déduisons alors que :

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad \frac{dv_x}{dt} = -\frac{GMa}{r^3}$$

Comme nous considérons un faisceau de photons , nous avons : $dz = c dt$

Il nous reste alors à intégrer l'expression suivante : $dv_x = -\frac{GMa}{r^3} \frac{dz}{c}$

En intégrant sur des bornes infinies , nous obtenons :

$$v_x = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMa}{r^3} \frac{dz}{c} = -\frac{GMa}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r^3} = -\frac{GMa}{c} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dz}{r^3} + \int_0^{+\infty} \frac{dz}{r^3} \right)$$

Comme la fonction $\frac{1}{r^3}$ est impaire , nous aurons : $v_x = -\frac{2GMa}{c} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{r^3}$

Posons maintenant $\frac{z}{a} = \tan u$, nous avons : $\frac{dz}{a} = \frac{1}{\cos^2 u} du$ et $r = \frac{a}{\cos u}$

Les bornes de l'intégrale sont alors modifiées ; la borne inférieure portera la valeur 0 et la borne supérieure portera la valeur $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons donc :

$$v_x = -\frac{2GMa^2}{ca} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 u}{a^3} \frac{1}{\cos^2 u} du = -\frac{2GM}{ac} \int_0^{\pi/2} \cos u du$$

Nous pouvons alors conclure que :

$$v_x = -\frac{2GM}{ac} [\sin u]_0^{\pi/2} = -\frac{2GM}{ac}$$

Comme $v_z = c$ et $\frac{v_x}{v_z} = \tan \alpha$, nous aurons :

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{2GM}{ac} \frac{1}{c}\right) = -\arctan\left(\frac{2GM}{ac^2}\right)$$

Comme le terme $\frac{2GM}{ac^2}$ est généralement petit devant 1, nous pouvons dire, en première approximation, que : $\alpha = -\frac{2GM}{ac^2}$

La mécanique newtonienne prévoit donc que des photons passant au voisinage d'un potentiel gravitationnel sont déviés suivant un angle proportionnel à la masse du corps créant le potentiel et inversement proportionnel à la distance du centre de masse de ce corps.

La déviation de ces photons est donnée par l'expression : $\alpha = -\frac{2GM}{ac^2}$

2) Déviation en mécanique relativiste

Nous avons vu, dans le chapitre sur le principe d'équivalence, que nous pouvons écrire l'équation du mouvement de la particule en relativité générale à partir de la métrique.

Rappelons tout d'abord l'équation du mouvement en relativité :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

Où $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ est le symbole de Christoffel, défini par : $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma} \right)$

Nous avons remplacé le terme τ désignant généralement le temps propre par le terme λ . En effet, nous considérons un flux de photons, de masse nulle, se déplaçant à la vitesse de la lumière.

L'intervalle entre deux événements liés à des photons sera nul (ils suivent ainsi des géodésiques nulles); il n'est donc pas judicieux d'utiliser comme variable de notre équation du mouvement le terme τ , qui sera toujours nul.

Ainsi, nous emploierons plutôt λ , défini comme étant égal à τ/m , m étant la masse que nous ferons tendre vers 0.

Nous pouvons nous placer dans l'approximation des faibles champs.

La métrique sera une métrique minskowskienne dont la gravitation ne sera qu'un terme perturbatif.

Nous aurons ainsi : $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$

où l'élément du tenseur de Minkowsky $\eta_{\alpha\beta}$ est égal à :

$$\eta_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{si } \alpha = \beta = 1, 2, 3$$

$$\eta_{\alpha\beta} = -1 \quad \text{si } \alpha = \beta = 0$$

où l'élément du tenseur de gravitation $h_{\alpha\beta}$ est une perturbation et est très inférieur à 1.

Cherchons alors une expression simplifiée du symbole de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}(\eta^{\nu\mu} - h^{\nu\mu}) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\eta_{\beta\nu} + h_{\beta\nu}) + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu}) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\eta_{\beta\alpha} + h_{\beta\alpha}) \right)$$

Comme les termes de $\eta_{\alpha\beta}$ sont constants, ils disparaissent dans la dérivation :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}(\eta^{\nu\mu} - h^{\nu\mu}) \left(\frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right)$$

De même, nous ne conservons que les termes du premier ordre en $h_{\alpha\beta}$:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\nu\mu} \left(\frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right)$$

En distribuant le terme du tenseur de Minkowsky à l'intérieur des dérivées partielles, nous obtenons :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\eta^{\nu\mu} h_{\beta\nu}) + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(\eta^{\nu\mu} h_{\alpha\nu}) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\eta^{\nu\mu} h_{\beta\alpha}) \right)$$

Nous pouvons alors contracter les tenseurs et trouver une nouvelle expression de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{\beta}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial h_{\alpha}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \right)$$

Dans la métrique des champs faibles, le tenseur $h_{\alpha\beta}$ est diagonal ; chacun des termes de la diagonale s'écrit alors : $h_{\alpha\alpha} = -\frac{2\phi}{c^2}$, ϕ étant le potentiel gravitationnel.

Réécrivons maintenant l'équation du mouvement en fonction des vitesses ; nous avons :

$$p^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \quad p^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \quad p^{\beta} = \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}$$

L'équation du mouvement prend alors la forme : $\frac{dp^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} p^{\alpha} p^{\beta} = 0$

En remplaçant le symbole de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ par sa valeur dans l'équation du mouvement, nous obtenons :

$$\frac{dp^{\mu}}{d\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{\beta}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial h_{\alpha}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \right) p^{\alpha} p^{\beta} = 0$$

Contractons maintenant les notations en posant que :

$$h_{\mu\beta,\alpha} = \frac{\partial h_{\beta}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \quad h_{\mu\alpha,\beta} = \frac{\partial h_{\alpha}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \quad h_{\alpha\beta,\mu} = \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{dp^{\mu}}{d\lambda} + \frac{1}{2} (h_{\mu\beta,\alpha} + h_{\mu\alpha,\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}) p^{\alpha} p^{\beta} = 0$$

Il nous reste, avant d'aborder la résolution de notre problème, de poser les conditions initiales que nous allons appliquer à notre photon passant au voisinage de la source de potentiel gravitationnel.

Nous posons alors que :

$$p_0^x = 0 \quad p_0^y = 0 \quad p_0^0 = p_0^z = \frac{h\nu_0}{c} = \omega = \frac{dz}{d\lambda}$$

Nous cherchons donc à déterminer p^{μ} pour μ identique à x et y .

Comme le tenseur $h_{\alpha\beta}$ est diagonal et comme p_0^{α} et p_0^{β} sont non nuls pour α et β identiques à 0 ou z , nous aurons :

$$\frac{dp^{\mu}}{d\lambda} = \frac{1}{2} (h_{00,\mu} p_0^{02} + 2 h_{0z,\mu} p_0^z p_0^0 + h_{zz,\mu} p_0^{z2})$$

Pour une forme de potentiel à symétrie radiale , nous avons : $h_{00} = h_{zz}$ et $h_{0z} = 0$

Nous pouvons alors simplifier notre équation du mouvement :

$$\frac{d p^\mu}{d \lambda} = \frac{1}{2} (h_{00} + h_{zz})_{,\mu} \omega^2$$

Comme nous avons dit que le terme de perturbation $h_{\alpha\beta}$ du tenseur de Minkowsky $\eta_{\alpha\beta}$ est défini par $h_{\alpha\alpha} = -\frac{2\phi}{c^2}$, nous aurons donc deux équations différentielles à résoudre pour déduire la trajectoire du photon après sa déviation , suivant les coordonnées x et y .

Ces équations sont les suivantes :

$$\frac{d p^x}{d \lambda} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2\phi}{c^2} - \frac{2\phi}{c^2} \right)_{,x} \omega^2 = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \omega^2$$

$$\frac{d p^y}{d \lambda} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2\phi}{c^2} - \frac{2\phi}{c^2} \right)_{,y} \omega^2 = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \omega^2$$

Comme nous avons vu que $p_z = \frac{dz}{d\lambda}$, les équations différentielles peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d p^x}{d \lambda} \frac{d \lambda}{dz} \frac{1}{p^z} = \frac{1}{p^z} \frac{d p^x}{dz} = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \omega^2$$

$$\frac{d p^y}{d \lambda} \frac{d \lambda}{dz} \frac{1}{p^z} = \frac{1}{p^z} \frac{d p^y}{dz} = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \omega^2$$

L'angle de déviation suivant x sera alors donné par : $\alpha_x = \left(\frac{p^x}{p^z} \right)_{final}$, donc :

$$\alpha_x = \frac{1}{p^z} \int_{-\infty}^{+\infty} p^z \left(\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dz = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dz$$

L'angle de déviation suivant y sera alors donné par : $\alpha_y = \left(\frac{p^y}{p^z} \right)_{final}$, donc :

$$\alpha_y = \frac{1}{p^z} \int_{-\infty}^{+\infty} p^z \left(\frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dz = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} dz$$

Il est maintenant temps de revenir à une forme de potentiel connu , celui que nous avons déjà employé dans le calcul de la déviation en mécanique newtonienne .

Ainsi , nous prenons de potentiel ϕ tel que : $\phi = -\frac{GM}{r}$

Nous nous plaçons dans le plan xOy donc : $y=0$ et $r = \sqrt{x^2 + z^2}$

$$\text{Alors : } \frac{\partial \phi}{\partial x} = -GM \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = -\frac{GMx}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En introduisant ceci dans le calcul de l'angle de déviation :

$$\alpha = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMx}{(x^2 + y^2)} dz = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMx}{x^3 \left(1 + \frac{z^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} dz$$

$$\text{En posant } u = \frac{z}{x}, \text{ nous avons : } \alpha = \frac{2GM}{xc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En posant $u = \sinh v$, nous avons : $du = \cosh v dv$

$$\text{Alors : } \alpha = \frac{2GM}{xc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh v dv}{(1 + \sinh^2 v)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2GM}{xc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\cosh^2 v} = \frac{2GM}{xc^2} [\tanh v]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4GM}{xc^2}$$

La mécanique relativiste prévoit donc qu'un rayon lumineux est dévié par une source de potentiel gravitationnel .

$$\text{L'angle de déviation est alors donnée par l'expression : } \alpha = \frac{4GM}{ac^2}$$

3) Conclusion

Nous venons de retrouver , dans les deux paragraphes précédents , que les prédictions de déviation des rayons lumineux au voisinage d'un champ gravitationnel faible , dans le cadre d'une mécanique newtonienne ou relativiste , sont différentes .

Si nous ne nous préoccupons pas pour l'instant du facteur 2 entre les deux prédictions , nous pouvons remarquer que les deux déviations sont strictement du même ordre de grandeur , c'est sans doute pour cela que la relativité générale a eu tant de mal à être admise au sein de la communauté scientifique du début de notre siècle .

Les corrections qu'elle apportait étaient très faibles ; et l'angle de déviation mesuré pour un photon passant au voisinage du Soleil , de l'ordre de la seconde d'arc , pouvait être entaché de beaucoup d'erreurs expérimentales ... d'où la très grande difficulté de faire admettre dans un monde de physiciens une théorie aux lourds bagages mathématiques .

IV. OPTIQUE GRAVITATIONNELLE

Nous avons vu , dans le chapitre précédent , que les théories autant newtonienne que relativiste prévoient une déviation pour un rayon lumineux passant au voisinage d'une source de potentiel .

Dans notre chapitre d'introduction , une expression fort simple nous montrait que la déviation pour un photon , au voisinage du Soleil , était de 1,75 secondes d'arc . Le photon passait ainsi à une distance avoisinant les 700.000 kilomètres du centre du Soleil , de masse 2.10^{30} kilogrammes .

Il est maintenant temps de grimper de plusieurs dizaines d'ordres de grandeur dans l'échelle de l'univers , tant au niveau des masses que des distances , dans les effets de déviation des rayons lumineux dont nous allons dorénavant parler .

Nous allons , dans ce chapitre , décrire certains éléments de ce nouveau domaine d'investigations que constitue l'optique gravitationnelle , en nous plaçant toutefois dans le cadre de certaines approximations ou hypothèses .

1) Hypothèses de travail

Si nous ne donnons pas très vite les limites de notre étude , le problème en question devient très rapidement inextricable . Nous serions en effet très vite appelé à nous lancer , d'une part dans une étude de l'univers à grande échelle à travers la cosmologie , d'autre part dans l'élaboration d'algorithmes visant à modéliser au mieux ce que serait une image vue à travers une lentille gravitationnelle .

Par exemple , si nous cherchons la trajectoire d'un photon dans un espace où existent plusieurs sources de potentiels gravitationnels , nous nous trouvons face à une entreprise particulièrement ardue ; il faudrait en effet , en utilisant l'expression de la déviation au voisinage d'une source sphérique , calculer l'influence de chaque masse sur la trajectoire du photon quelle que soit sa position spatiale , en tenant compte que l'espace est courbe ...

Nous allons donc définir en quelques hypothèses , somme toute très acceptables , les domaines de travail dans lesquels nous allons évoluer au cours des chapitres qui suivront .

Voici donc la liste de ces hypothèses que nous tenterons de définir :

- approximation des lentilles minces
- milieu transparent
- champs gravitationnels faibles et stationnaires
- angles de déviation petits
- espace euclidien

a) Approximation des lentilles minces

Dans l'exemple que nous donnions pour le Soleil , la distance de plus courte approche était d'environ quelques centaines de milliers de kilomètres . Bien que cette distance soit très grande comparée à l'échelle de l'homme et ses activités , cette échelle , en astrophysique , et a fortiori en cosmologie , est extrêmement petite .

b) Milieu transparent

Nous supposons que les photons défléchis par la lentille ne sont en aucun cas absorbés par les objets la composant . La lentille est donc considérée comme transparente vis à vis des photons la traversant .

De même , l'espace situé entre la source et l'ensemble des objets constituant la lentille est considéré comme quasiment vide .

c) Champs gravitationnels faibles et stationnaires

A la force gravitationnelle introduite par Isaac Newton fut introduit le concept de champ , avec les développements du calcul infinitésimal . Ainsi la masse centrale créait un champ gravitationnel ; il était donc fonction de cette masse . De ce champ se déduisait la force gravitationnelle , fonction de la masse des deux objets . La relation entre le champ et la force n'était qu'une simple différentielle . De ce fait , plus le champ gravitationnel évoluait rapidement , plus la force gravitationnelle tendant à rapprocher les deux corps était grande .

Le champ de gravitation déduit de la force d'attraction gravitationnelle est fonction de la masse de l'objet M , de la distance au centre de masse de cet objet r et de la constante de gravitation G .

Soit ϕ ce champ de gravitation :
$$\phi = -\frac{GM}{r}$$

Le champ de gravitation étant directement proportionnel à la répartition de masse , il est nécessaire d'estimer les masses mises en jeu dans ce type de phénomène que constitue l'effet de lentille gravitationnelle .

Les galaxies étant des ensembles de centaines voire de milliers de milliards d'étoiles , la masse caractéristique d'une galaxie sera de l'ordre de plusieurs centaines de milliards de masses solaires . Mais la matière stellaire (contractée sous forme d'étoiles) ne constitue pas la totalité de la masse ; les nuages de gaz , les systèmes planétaires à l'intérieur même des galaxies , le halo entourant les galaxies ont une contribution non négligeable à leur masse .

De plus , il a été observé que les arcs gravitationnels possèdent une étendue supérieure à celle résultant de simulations , compte tenu des estimations de masse .

L'introduction de matière noire permet néanmoins de lever ce paradoxe , en surévaluant la masse des galaxies et des amas de galaxies de un à deux ordres de grandeur afin de satisfaire les observations expérimentales .

Si nous incluons le potentiel énoncé plus haut dans les termes de la métrique définissant l'espace-temps , il est de l'ordre de 10^{-7} . Nous pourrions donc utiliser sans problème l'hypothèse des champs faibles dans notre étude .

De même , les champs mis en jeu dans les processus de lentille gravitationnelle évoluent au cours du temps , mais les temps d'observation sont très petits comparés aux temps nécessaires au champ de gravité pour se modifier de manière significative (ceci même si les galaxies formant la lentille , donc la source de gravité , sont en chute libre les unes sur les autres) . Ainsi , les paramètres de la lentille n'évoluent quasiment pas à l'échelle temporelle de l'homme .

De ce fait , nous pourrions considérer que les champs mis en jeu dans les processus de lentille gravitationnelle sont à la fois petits et stationnaires .

d) Angles de déviation petits

Nous avons vu , dans le chapitre sur la déviation des rayons lumineux , que l'angle de déviation est directement relié au terme de gravitation introduit dans la métrique , et qu'il est , de plus , quantitativement du même ordre . De même , en nous plaçant dans l'approximation des champs faibles , ce terme de la métrique est de l'ordre de 10^{-7} . L'angle de déviation occasionné par une distribution de masses , jouant le rôle de lentille gravitationnelle , sera alors d'environ 10^{-7} radians . Les angles de déviation seront donc de l'ordre de la seconde d'arc voire parfois de plusieurs dizaines de secondes d'arc .

e) Espace euclidien

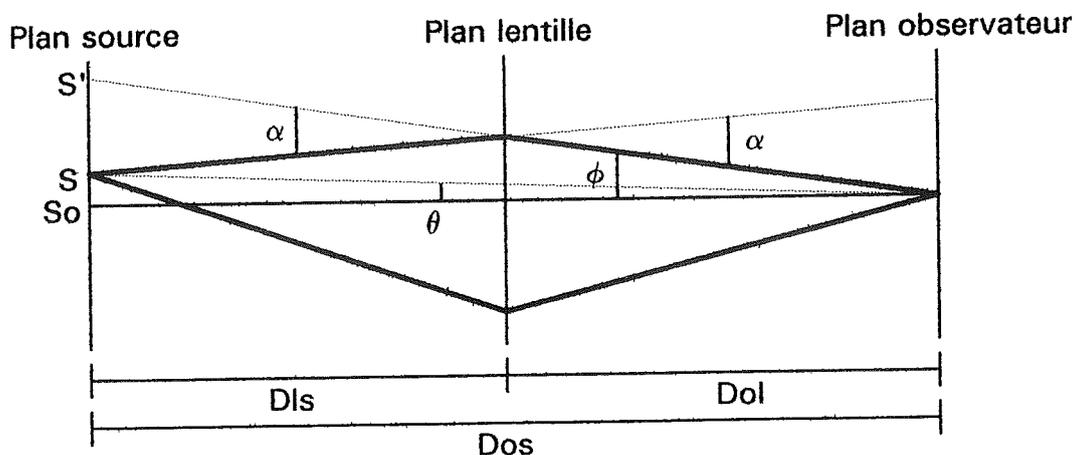
A l'intérieur même du principe d'équivalence il est possible de découvrir que l'univers d'après Einstein est courbe . Ce résultat est à la base de tous les tests classiques de la relativité générale . La matière contenue dans un espace-temps courbe l'espace-temps dans lequel se trouve cette matière .

Edwin Hubble a montré , dans les années 1930 , que l'univers était en expansion . Ses successeurs se sont alors chargés de courber cet univers en perpétuelle évolution . L'univers , à grandes dimensions , est donc courbe , et l'objet que nous voyons n'est pas nécessairement dans la direction (en ligne droite) d'observation , même en visée directe .

L'espace dans lequel nous nous plaçons dans le cadre de notre étude est euclidien , où les trois dimensions hauteur , largeur et profondeur forment un trièdre direct . L'objet dont nous observons les mirages gravitationnels est exactement dans la direction de la lentille , ceci en ligne droite et non en géodésique comme c'est généralement le cas dans un espace courbe .

2) Equation des lentilles

Comme en optique géométrique , nous allons modéliser un banc optique contenant les trois plans dont nous allons dorénavant parler ; le plan source , le plan lentille et le plan observateur .



Nous posons $\tan \theta = \frac{SoS}{Dos}$ et $\tan \phi = \frac{SoS}{Dos}$

Nous avons : $SoS = SoS + SS'$ avec $SoS = Dos \tan \theta$
 $SS' = Dls (\tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi))$

Comme $SoS = Dos \tan \phi$, nous avons :

$$Dos \tan \phi = Dos \tan \theta + Dls (\tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi))$$

Nous nous sommes placés dans l'approximation des petits angles, nous pouvons donc prendre un développement en série de tan au premier ordre pour les angles α , θ et ϕ .

Ainsi, en remplaçant $\tan \alpha$ par α , $\tan \theta$ par θ et $\tan \phi$ par ϕ , nous obtenons :

$$Dos \phi = Dos \theta + Dls ((\alpha - \phi) + (\phi))$$

Nous obtenons alors l'équation des lentilles minces :

$$Dos \phi = Dos \theta + Dls \alpha$$

Maintenant que nous connaissons l'équation qui va régir la position des sources virtuelles, c'est à dire celle des mirages gravitationnels, nous allons pouvoir donner certaines propriétés de ces lentilles gravitationnelles.

3) Paramètres des lentilles gravitationnelles

Si la position des mirages est donnée par une résolution de l'équation des lentilles, tentons dès à présent de cerner les paramètres influant sur la position radiale des sources virtuelles.

Généralement, l'équation des lentilles se réécrit de manière suivante :

$$\phi - \theta = \frac{Dls}{Dos} \alpha$$

Cette réécriture possède l'immense avantage de pouvoir se résoudre graphiquement.

Ainsi, nous devons tracer en premier lieu dans le plan la droite $\phi - \theta$ et la courbe $\frac{Dls}{Dos} \alpha$. Les solutions de cette équation sont alors les points d'intersection de la droite $\phi - \theta$ avec la courbe $\frac{Dls}{Dos} \alpha$.

Ainsi, fixant l'angle θ , nous pouvons, pour un angle ϕ donné, déterminer graphiquement la position radiale des mirages.

Nous avons vu que , dans le cas d'un objet assimilé à une masse ponctuelle , comme le Soleil , l'expression de l'angle de déviation dépendait de la masse de l'objet , donc du potentiel gravitationnel créé par cet objet .

Donnons ainsi les expressions des différents potentiels que nous pouvons rencontrer dans un problème simple :

- **Point masse**

L'expression du champ de gravitation pour une distribution de masse ponctuelle est très simple . Avec elle , nous pouvons retrouver l'expression de la force d'attraction gravitationnelle que Newton a énoncé .

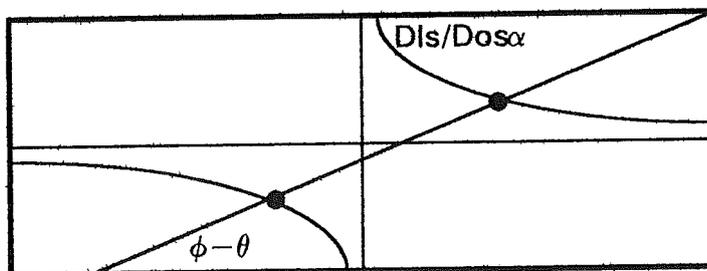
Si nous appelons ϕ ce champ de gravitation , nous avons : $\phi = -\frac{GM}{r}$

Nous avons vu , dans le chapitre sur la déviation des rayons lumineux , que l'expression de la déviation α à une distance r de la masse M était :

$$\alpha = -\frac{4GM}{rc^2}$$

Cette forme de potentiel , permettant d'obtenir une expression très simple de l'angle de déviation , possède toutefois quelques inconvénients , dont le plus marquant est un angle de déviation infini pour une distance nulle au centre .

Si nous voulons résoudre graphiquement l'équation des lentilles , nous obtenons :



Nous voyons que le nombre de points d'intersection entre la droite $\phi - \theta$ et la courbe d'équation $\frac{Dls}{Dos} \alpha$ sont au nombre de deux . Nous obtiendrons alors deux images diamétralement opposées dont la distance angulaire nous sera donnée en déduisant ϕ connaissant θ .

- **Sphère avec rayon de coeur**

Nous pouvons , à l'intérieur de l'expression du potentiel , introduire un paramètre supplémentaire , le rayon de coeur , qui sera , pour notre source de potentiel gravitationnelle à symétrie sphérique , la distance du centre de masse où le champ sera maximal .

L'introduction de ce paramètre va permettre de rendre compte de certaines propriétés des lentilles gravitationnelles .

Pour une sphère avec rayon de coeur , l'expression du potentiel gravitationnel ϕ est la suivante :

$$\phi = -GM \frac{r}{r^2 + r_c^2} , \text{ où } r_c \text{ est le rayon de coeur}$$

Nous pourrions , comme nous l'avons fait dans le chapitre sur la déviation des rayons lumineux , calculer analytiquement l'angle de déviation pour un potentiel identique à celui que nous venons de définir , mais nous pouvons d'ores et déjà donner certaines informations sur le rayon de coeur .

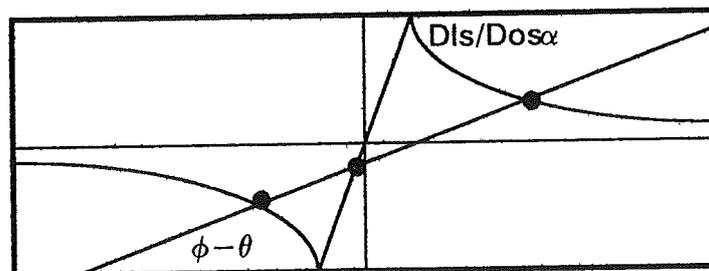
Nous avons vu que le rayon de coeur était la distance au centre de masse où le champ gravitationnel est maximal (en norme) . Dans les objets occasionnant la déviation des rayons lumineux présents dans le plan lentille , le rayon de coeur est très petit devant la dimension observable de la galaxie , c'est à dire la dimension du centre à la périphérie visible de la galaxie.

Nous allons donc , en supposant que le rayon de coeur est très petit devant la distance au centre de masse du photon , déduire une expression de l'angle de déviation des rayons lumineux , au voisinage d'une masse M , à une distance r , pour un rayon de coeur r_c :

$$\alpha = -\frac{4GM}{c^2} \frac{r}{r^2 + r_c^2}$$

Dans cette expression , nous pouvons remarquer que , lorsque le rayon de coeur r_c tend vers 0 , nous retrouvons l'expression de l'angle de déviation au voisinage d'une masse ponctuelle .

Tentons maintenant de résoudre graphiquement l'équation de lentilles pour la déviation définie précédemment :



Nous voyons que le nombre de points d'intersection entre la droite $\phi - \theta$ et la courbe d'équation $\frac{Dls}{Dos} \alpha$ sont au nombre de trois . Nous verrons apparaître , à partir d'une seule source , trois mirages gravitationnels . Nous pourrions également déduire , connaissant θ , la distance angulaire ϕ de ces mirages .

Nous avons vu quels étaient les types de potentiels les plus simples , définis à partir de la masse de l'objet servant de lentille . Aussi , conserverons-nous , lors de la modélisation du phénomène , l'expression de la déviation pour une sphère avec rayon de coeur .

Connaissant certaines caractéristiques de ces mirages , nous allons pouvoir dès à présent en donner quelques propriétés .

4) Propriétés des lentilles gravitationnelles

Les propriétés de ces mirages très exotiques sont les suivantes :

- multiplicité des images
- amplification des images
- lentille achromatique
- nombre impair d'images

a) Multiplicité des images

Nous avons vu , en résolvant de manière graphique l'équation des lentilles , qu'il existait plusieurs solutions . Chacune de ces solutions permet de revenir à la distance angulaire séparant l'axe de la lentille de la position du mirage .

Il existe donc plusieurs images d'une même source , d'où l'effet de multiplicité d'images . Cet effet n'a été observé pour la première fois qu'en 1979 , lorsque les astronomes ont vu deux quasars distants angulairement de plusieurs secondes d'arc , possédant exactement le même spectre et quasiment la même distribution photonique .

b) Amplification des images

Dans l'introduction , nous disions que les lentilles possédaient une propriété d'amplification , ou , autre manière de dire les choses , le nombre de photons reçus par un observateur avec la lentille est supérieur au nombre de photons qu'aurait reçus l'observateur s'il n'y avait pas de lentille .

En effet , en absence de lentille , les photons arrivent directement de la source . Au fur et à mesure que nous nous éloignons de la source , le nombre de photons que nous recevons de la source diminue en fonction du carré de la distance .

Si nous supposons qu'une lentille existe entre la source et l'observateur , les photons arrivant sur le plan lentille n'étant pas en direction de l'observateur peuvent se retrouver , après déviation , en direction de l'observateur , et cela sur tout le plan lentille .

Nous " récupérons " ainsi des photons venant de la totalité du plan lentille qui sont dans notre direction d'observation .

c) Lentille achromatique

Dans l'expression de l'angle de déviation au voisinage d'un objet massif , nous avons vu que cet angle ne dépendait que de la masse de l'objet produisant la déflexion et de la distance séparant le photon du centre de masse de l'objet . A aucun moment n'apparaît l'énergie du photon dans cette expression .

Ainsi , quelque soit l'énergie du photon , nous aurons toujours le même angle de déviation , qu'il s'agisse d'un photon du domaine des rayons γ , du domaine optique ou radio .

d) Nombre impair d'images

Lors de la définition des potentiels mis en jeu à l'intérieur de la lentille gravitationnelle , nous avons résolu graphiquement la position des sources virtuelles .

Nous venons de voir que la propriété principale de la lentille gravitationnelle était la multiplicité des images . Dans le cas d'un point masse , nous trouvions deux images et dans le cas de la sphère à rayon de coeur , nous trouvions trois images .

Généralement , le nombre d'images est impair , sauf dans le cas d'un point masse , quelle que soit la forme du potentiel , qui se rapproche de près ou de loin de la forme du potentiel de sphère avec rayon de coeur .

Dans le cas d'un point masse , nous pouvons toujours considérer qu'il s'agit d'une sphère avec rayon de coeur dont le rayon de coeur tend vers 0 . Ainsi , sur certains mirages gravitationnels , le nombre d'images est pair , tout simplement parce que le rayon de coeur est tellement petit que le mirage correspondant est trop faible pour être observé .

5) Introduction à la modélisation

Nous venons de donner , dans ce dernier chapitre , les caractéristiques élémentaires des lentilles gravitationnelles et des mirages leur étant associés .

Penchons-nous dès à présent sur une possible simulation qui devrait nous permettre , simplement , de retrouver ces mirages multiples dont nous venons d'évoquer les propriétés .

Lors du prochain chapitre , nous allons donc tenter de modéliser ce phénomène de déflexion gravitationnelle , en restant toutefois dans le cadre des hypothèses et approximations que nous avons jusqu'à présent utilisées .

V. MODELISATION DU PHENOMENE

1) Algorithme de calcul

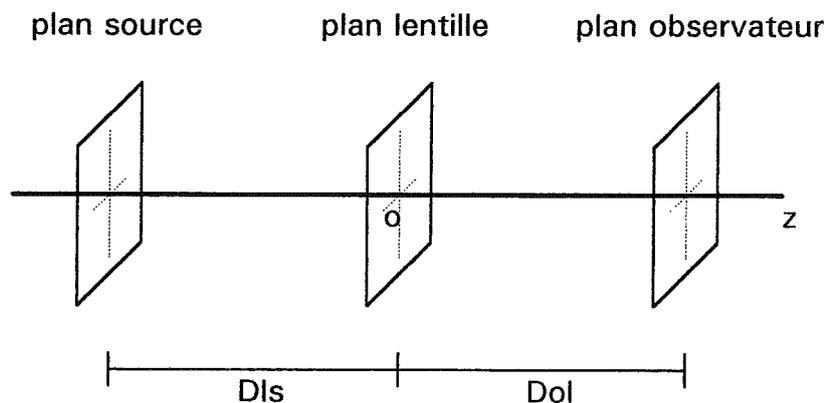
Avant d'aborder les éléments mathématiques qui vont nous être nécessaires pour notre simulation, donnons d'ores et déjà la méthode générale que nous allons employer dans notre modélisation.

Cet algorithme se compose de quatre étapes :

- détermination de l'incidence des photons venant de la source en un point du plan lentille
- calcul de la direction de sortie des photons après la lentille
- test vérifiant si oui ou non le photon dévié arrive en direction de l'observateur
- si ce test est positif, une nouvelle source virtuelle est définie dans le plan source.

Une fois ces quatre étapes réalisées, il suffit d'afficher les images de ces sources virtuelles puis d'y superposer l'image de l'amas de galaxies, c'est à dire le plan lentille.

Voici le plan général que nous vous proposons de suivre. L'origine du repère cartésien que nous utiliserons sera le centre du plan lentille et la direction générale de propagation des photons se produira du plan source vers le plan observateur, c'est à dire dans la direction des z positifs.



2) Eléments mathématiques

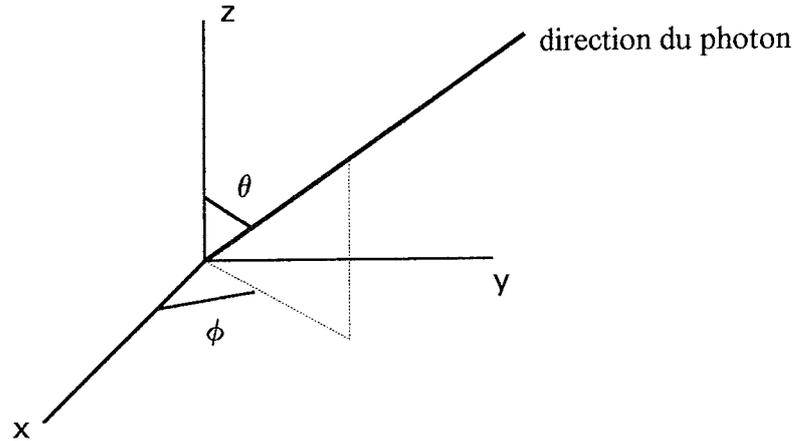
Le premier élément de notre étude va consister à choisir une manière de représenter une direction, celle du photon au cours de son déplacement.

La première manière qui vient à l'esprit pour représenter une direction est une méthode vectorielle ; nous pouvons associer cette direction à un vecteur possédant trois composantes suivant les trois directions de notre espace.

Cette manière possède beaucoup d'inconvénients, à commencer par le fait qu'elle est très lourde à mettre en oeuvre et que, de plus, elle n'utilise aucune des approximations que nous avons énoncées au paragraphe précédent.

L'autre méthode , que nous emploierons , consiste à se placer en coordonnées sphériques . Là , notre direction n'a besoin que de deux paramètres , des paramètres angulaires, pour être définie . Cette direction est également associée à un vecteur en coordonnées sphériques , mais le seul paramètre nouveau qui apparaît est la longueur du vecteur dont nous n'aurons aucune utilité .

Ainsi , les directions d'arrivée et de départ avant et après la lentille seront définies par deux paramètres θ et ϕ .



Tout d'abord , avant un quelconque calcul concernant notre problème , intéressons-nous au changement de coordonnées d'un repère sphérique vers un repère cartésien et réciproquement .

Nous pouvons définir un repère en coordonnées sphériques où \bar{e}_r est la direction de notre photon . Dans ce repère , nous pouvons également définir deux autres vecteurs \bar{e}_θ et \bar{e}_ϕ qui forment un trièdre direct et sont alors perpendiculaires deux à deux .

Considérons un vecteur unitaire \bar{e}_r ; nous pouvons déterminer ses coordonnées cartésiennes x , y et z connaissant les angles θ et ϕ ; nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi \sin \theta \\ y &= \sin \phi \sin \theta \\ z &= \cos \theta \end{aligned}$$

Ce qui donne , si nous exprimons \bar{e}_r en fonction \bar{e}_x , \bar{e}_y et \bar{e}_z :

$$\bar{e}_r = \cos \phi \sin \theta \bar{e}_x + \sin \phi \sin \theta \bar{e}_y + \cos \theta \bar{e}_z$$

De même , nous pouvons également déduire que , pour \bar{e}_θ et \bar{e}_ϕ , nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{e}_\theta &= \cos \phi \cos \theta \bar{e}_x + \sin \phi \cos \theta \bar{e}_y - \sin \theta \bar{e}_z \\ \bar{e}_\phi &= -\sin \phi \bar{e}_x + \cos \phi \bar{e}_y \end{aligned}$$

Il nous est alors possible de définir une matrice de changement de base dans laquelle un vecteur en coordonnées sphériques pourra s'exprimer dans une base cartésienne par un simple produit matriciel :

$$\begin{array}{ccc} \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{array}$$

Cette matrice de changement de base est unitaire . Sa matrice transposée sera donc égale à sa matrice inverse .

Nous pouvons donc exprimer les vecteurs de la base cartésienne \bar{e}_x , \bar{e}_y et \bar{e}_z en fonction des vecteurs \bar{e}_r , \bar{e}_θ et \bar{e}_ϕ de la base sphérique :

$$\begin{aligned} \bar{e}_x &= \cos \phi \sin \theta \bar{e}_r + \cos \phi \cos \theta \bar{e}_\theta - \sin \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_y &= \sin \phi \sin \theta \bar{e}_r + \sin \phi \cos \theta \bar{e}_\theta + \cos \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_z &= \cos \theta \bar{e}_r - \sin \theta \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

Etant placés dans l'approximation des faibles déviations , nous pouvons dire que l'angle θ est très petit devant 1 . Il est alors possible d'effectuer un développement au premier ordre pour la fonction sinus et au deuxième ordre pour la fonction cosinus .

Ainsi , $\sin \theta$ est à remplacer par θ et $\cos \theta$ est à remplacer par $1 - \frac{\theta^2}{2}$.

Nous obtenons alors , dans la base sphérique :

$$\begin{aligned} \bar{e}_r &= \theta \cos \phi \bar{e}_x + \theta \sin \phi \bar{e}_y + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \bar{e}_z \\ \bar{e}_\theta &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi \bar{e}_x + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi \bar{e}_y - \theta \bar{e}_z \\ \bar{e}_\phi &= -\sin \phi \bar{e}_x + \cos \phi \bar{e}_y \end{aligned}$$

De même , dans la base cartésienne , nous obtenons également :

$$\begin{aligned} \bar{e}_x &= \theta \cos \phi \bar{e}_r + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi \bar{e}_\theta - \sin \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_y &= \theta \sin \phi \bar{e}_r + \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi \bar{e}_\theta + \cos \phi \bar{e}_\phi \\ \bar{e}_z &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \bar{e}_r - \sin \theta \bar{e}_\theta \end{aligned}$$

• Calcul des deux angles définissant la trajectoire du rayon incident sur la lentille

Cherchons maintenant à parvenir à l'expression de ces deux paramètres θ et ϕ , pour le rayon arrivant de la source sur la lentille , connaissant les coordonnées de la source dans le plan source , la distance de plus courte approche dans le plan lentille ainsi que la distance séparant la lentille de la source .

Soient x_s et y_s les coordonnées de la source dans le plan source .

Soient x_L et y_L les coordonnées du point de plus courte approche dans le plan lentille .

Soit d_{LS} , la distance séparant le plan source du plan lentille .

Comme nous nous plaçons dans l'approximation des angles faibles , l'angle θ définissant l'angle entre la direction z , est petit . Nous avons :

$$x_L - x_s = r \cos \phi \sin \theta \quad (1)$$

$$y_L - y_s = r \sin \phi \sin \theta \quad (2)$$

$$d_{LS} = r \cos \theta \quad (3)$$

Le terme r représente la norme du vecteur partant du point S du plan source arrivant au point L du plan lentille : $r = \sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2 + d_{LS}^2}$

En divisant (2) par (1) , nous obtenons : $\frac{y_L - y_s}{x_L - x_s} = \frac{r \cos \phi \sin \theta}{r \sin \phi \sin \theta} = \tan \phi$

De même , nous pouvons déduire une expression de θ , en élevant les lignes (1) et (2) au carré puis en effectuant la somme :

$$(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2 = r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta$$

Ce qui donne pour θ , θ étant compris entre 0° et 90° :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2 + d_{LS}^2}}$$

A ce stade , nous pouvons utiliser le fait que l'angle θ est petit devant 1 donc prendre un développement limité au premier ordre pour \sin . Egalement , la distance séparant les deux plans source et lentille d_{LS} est petite devant les coordonnées des points du plan source et du plan lentille mis en jeu . En première approximation , la norme du vecteur r sera identique à la distance d_{LS} .

Nous en déduisons une nouvelle expression pour θ :

$$\theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{d_{LS}}$$

En définitive , les deux paramètres angulaires θ et ϕ définissant la direction d'incidence du photon sur le plan lentille pourront se calculer à l'aide des expressions suivantes :

$$\theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{d_{LS}}$$

$$\tan \phi = \frac{y_L - y_s}{x_L - x_s}$$

• **Calcul des nouveaux paramètres angulaires après la déflexion due à la lentille**

Afin de parvenir à trouver une solution analytique des angles de déviation du photon après sa déviation à travers le plan de la lentille, nous devons nous placer dans le plan défini par le vecteur donnant la direction du photon et le vecteur allant du point de plus courte approche L au point G définissant la galaxie.

L'angle de déviation sera noté $\Delta\phi$ et son expression sera :

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2} \frac{r}{r^2 + r_c^2}$$

où

- r est égal à : $r = \sqrt{(x_G - x_L)^2 + (y_G - y_L)^2}$
- r_c est le rayon de coeur

Nous devons également définir un angle α , paramètre du vecteur situé dans le plan lentille, reliant le point L au point G.

Pour ce vecteur, nous avons : $\vec{LG} = (x_G - x_L)\vec{e}_x + (y_G - y_L)\vec{e}_y = r(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$

Nous avons donc : $\alpha = \arctan \frac{y_G - y_L}{x_G - x_L}$

Si nous appelons \vec{e}_r' le vecteur désignant la direction du photon après sa déflexion, nous aurons :

$$\vec{e}_r' = \cos\Delta\phi\vec{e}_r + \sin\Delta\phi \frac{\vec{LG}}{LG}$$

Déterminons les coordonnées de \vec{LG} en coordonnées sphériques :

$$\vec{LG} = r(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$$

$$\begin{aligned} \vec{LG} = & r(\cos\alpha\cos\phi\sin\theta + \sin\alpha\sin\phi\sin\theta)\vec{e}_r \\ & + r(\cos\alpha\cos\phi\cos\theta + \sin\alpha\sin\phi\cos\theta)\vec{e}_\theta \\ & + r(-\cos\alpha\sin\phi + \sin\alpha\cos\phi)\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\vec{LG} = r[\cos(\alpha - \phi)(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta) + \sin(\alpha - \phi)\vec{e}_\phi]$$

Effectuons le produit scalaire du vecteur \vec{LG} suivant le vecteur \vec{e}_r ; nous avons :

$$\vec{LG} \cdot \vec{e}_r = r\cos(\alpha - \phi)\sin\theta = LL'$$

Ainsi , nous avons : $\vec{L}G = LL' \bar{e}_r + L' G$

Nous pouvons donc déduire que : $L' G = r \cos(\alpha - \phi) \cos \theta \bar{e}_\theta + r \sin(\alpha - \phi) \bar{e}_\phi$

Ainsi que sa norme vaut : $L' G = r \sqrt{\cos^2(\alpha - \phi) \cos^2 \theta + \sin^2(\alpha - \phi)}$

En supposant que l'angle θ est petit devant 1 , nous avons , pour $L' G$:

$$L' G = r \sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^2 \cos^2(\alpha - \phi) + \sin^2(\alpha - \phi)} = r \sqrt{(1 - \theta^2) \cos^2(\alpha - \phi) + \sin^2(\alpha - \phi)}$$

$$L' G = r \sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}$$

De même , avec les mêmes approximations , nous avons , pour $\vec{L} G$:

$$\vec{L} G = r \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \bar{e}_\theta + r \sin(\alpha - \phi) \bar{e}_\phi$$

Or , nous avons vu que : $\bar{e}_r' = \cos \Delta\phi \bar{e}_r + \sin \Delta\phi \frac{\vec{L} G}{L' G}$

Comme nous nous plaçons dans le cas des faibles déviations , l'angle $\Delta\phi$ est très petit devant 1 ; nous avons donc en première approximation :

$$\bar{e}_r' = \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \bar{e}_r + \Delta\phi \frac{\vec{L} G}{L' G}$$

Il nous reste maintenant à repasser en coordonnées cartésiennes , en nous limitant au deuxième ordre pour les angles petits .

Une fois en coordonnées cartésiennes , nous pourrions procéder par identification pour revenir aux angles donnant la direction à la sortie de la lentille .

Remplaçons \bar{e}_r , \bar{e}_ϕ et \bar{e}_θ par leur expression en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \bar{e}_r' = & \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \cos \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi - \sin(\alpha - \phi) \sin \phi \right] \right\} \bar{e}_x \\ & + \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \sin \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi - \sin(\alpha - \phi) \cos \phi \right] \right\} \bar{e}_y \\ & + \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[-\theta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \right] \right\} \bar{e}_z \end{aligned}$$

Le vecteur \bar{e}_r' a pour expression en coordonnées cartésiennes , en fonction des angles θ' et ϕ' de sortie , définissant la trajectoire :

$$\bar{e}_r' = \theta' \cos \phi' \bar{e}_x + \theta' \sin \phi' \bar{e}_y + \left(1 - \frac{\theta'^2}{2}\right) \bar{e}_z$$

En procédant par identification , nous avons :

$$1 - \frac{\theta'^2}{2} = \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[-\theta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \right] \right\} \bar{e}_z$$

Mais encore , en nous limitant au second ordre :

$$1 - \frac{\theta'^2}{2} = \left\{ \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}\right) + \Delta\phi \left[1 + \frac{1}{2} \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi) \right] \left[-\theta \cos(\alpha - \phi) \right] \right\}$$

Nous obtenons alors , au second ordre : $1 - \frac{\theta'^2}{2} = 1 - \frac{\Delta\phi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} + \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)$

Nous déduisons enfin l'expression de θ' , fonction de $\Delta\phi$ et θ :

$$\theta' = \sqrt{\Delta\phi^2 + \theta^2 + 2 \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)}$$

De même , nous avons :

$$\theta' \cos \phi' = \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \cos \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos \phi - \sin(\alpha - \phi) \sin \phi \right]$$

Ainsi que :

$$\theta' \sin \phi' = \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) \theta \sin \phi + \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1 - \theta^2 \cos^2(\alpha - \phi)}} \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cos(\alpha - \phi) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sin \phi - \sin(\alpha - \phi) \cos \phi \right]$$

En nous limitant au second ordre , nous obtenons :

$$\theta' \cos \phi' = \theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \cos \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]$$

$$\theta' \sin \phi' = \theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \sin \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \sin \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]$$

En divisant la seconde expression par la première , nous obtenons :

$$\tan \phi' = \frac{\theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \sin \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \sin \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]}{\theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos \phi \cos(\alpha - \phi) + \frac{\theta^2}{2} \cos \alpha \cos^2(\alpha - \phi) \right]}$$

En définitive , les angles θ' et ϕ' définissant la trajectoire du photon après sa déviation par la lentille seront donc les suivants :

$$\theta' = \sqrt{\Delta\phi^2 + \theta^2 + 2 \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)}$$

$$\phi' = \arctan \frac{\theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\sin \phi - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}{\theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}$$

• Test vérifiant si le photon arrive en direction de l'observateur

Rien ne servirait de connaître la direction du photon après sa déviation s'il nous était impossible de l'observer . Nous serons donc amenés à connaître la position du photon dans le plan observateur , c'est à dire les coordonnées qu'aurait ce photon une fois la distance lentille-observateur parcourue .

Nous avons vu que les coordonnées d'un vecteur en coordonnées cartésiennes , à partir de ses coordonnées sphériques , c'est à dire les deux angles θ et ϕ ainsi que la norme de ce vecteur r , sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Si nous considérons que le photon part dans la direction définie par les deux angles θ' et ϕ' après sa déviation due à la lentille , que son point de départ du plan lentille est de coordonnées x_L et y_L , et que , enfin , le plan observateur se trouve à une distance d_{OL} du plan lentille , nous aurons , en prenant x_O et y_O comme coordonnées d'impact du photon dans le plan observateur :

$$x_O = x_L + r \cos \phi' \sin \theta' \quad (1)$$

$$y_O = y_L + r \sin \phi' \sin \theta' \quad (2)$$

$$d_{OL} = r \cos \theta' \quad (3)$$

A partir de l'expression (3) , nous pouvons déduire une expression connue de r :

$$r = \frac{d_{OL}}{\cos \theta'}$$

Ce qui nous permet de trouver une expression de x_o et y_o en fonction des paramètres connus :

$$\begin{aligned}x_o &= x_L + d_{OL} \cos \phi' \tan \theta' \\y_o &= y_L + d_{OL} \sin \phi' \tan \theta'\end{aligned}$$

Comme nous nous sommes placés dans l'approximation des faibles déviations , l'angle θ' est très petit devant 1 . Nous pouvons donc en première approximation , remplacer le terme $\tan \theta'$ par θ' . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}x_o &= x_L + d_{OL} \theta' \cos \phi' \\y_o &= y_L + d_{OL} \theta' \sin \phi'\end{aligned}$$

Pour que le photon parvienne à l'observateur , il faut en théorie que le point d'impact des photons dans le plan observateur soit confondu avec l'origine .

En pratique , nous considérerons que le photon parvient à l'observateur si $\sqrt{x_o^2 + y_o^2}$ est inférieur à une certaine valeur .

Les conditions pour que le photon parvienne à l'observateur sont les suivantes :

$$\begin{aligned}x_o &= x_L + d_{OL} \theta' \cos \phi' && \text{avec } x_o = 0 \\y_o &= y_L + d_{OL} \theta' \sin \phi' && \text{avec } y_o = 0\end{aligned}$$

• Détermination de la position de la source virtuelle dans le plan source

Maintenant que nous sommes certains que le photon parvient à l'observateur , cherchons les coordonnées de la source virtuelle dans le plan source .

Nous avons vu que les coordonnées d'un vecteur en coordonnées cartésiennes , à partir de ses coordonnées sphériques , c'est à dire les deux angles θ et ϕ ainsi que la norme de ce vecteur r , sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \sin \theta \\y &= r \sin \phi \sin \theta \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Si nous considérons que le photon part dans la direction définie par les deux angles θ' et ϕ' après sa déviation due à la lentille , que son point de départ du plan lentille avait pour coordonnées x_L et y_L , et que , enfin , le plan source se trouve à une distance d_{LS} du plan lentille , nous aurons , en prenant x_s' et y_s' comme coordonnées de la source virtuelle dans le plan source :

$$x_s' = x_L + r \cos \phi' \sin \theta' \quad (1)$$

$$y_s' = y_L + r \sin \phi' \sin \theta' \quad (2)$$

$$-d_{LS} = r \cos \theta' \quad (3)$$

A partir de l'expression (3), nous pouvons déduire une expression connue de r :

$$r = \frac{-d_{LS}}{\cos \theta'}$$

Nous pouvons alors déduire, θ' étant petit, les coordonnées de la source virtuelle, dans le plan source :

$$\begin{aligned} x_s' &= x_L - d_{LS} \theta' \cos \phi' \\ y_s' &= y_L - d_{LS} \theta' \sin \phi' \end{aligned}$$

Algorithme principal de détermination des sources virtuelles

- détermination de l'incidence des photons venant de la source en un point du plan lentille

$$\theta = \frac{\sqrt{(x_L - x_s)^2 + (y_L - y_s)^2}}{d_{LS}}$$

$$\tan \phi = \frac{y_L - y_s}{x_L - x_s}$$

- calcul de la direction de sortie des photons après la lentille

$$\theta' = \sqrt{\Delta\phi^2 + \theta^2 + 2 \Delta\phi \theta \cos(\alpha - \phi)}$$

$$\phi' = \arctan \frac{\theta \sin \phi + \Delta\phi \left[\sin \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\sin \phi - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}{\theta \cos \phi + \Delta\phi \left[\cos \alpha - \theta^2 \cos(\alpha - \phi) \left(\cos \phi - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos(\alpha - \phi) \right) \right]}$$

- test vérifiant si oui ou non le photon dévié arrive en direction de l'observateur

$$\begin{aligned} x_O &= x_L + d_{OL} \theta' \cos \phi' && \text{avec } x_O = 0 \\ y_O &= y_L + d_{OL} \theta' \sin \phi' && \text{avec } y_O = 0 \end{aligned}$$

- si ce test est positif, une nouvelle source virtuelle est définie dans le plan source

$$\begin{aligned} x_s' &= x_L - d_{LS} \theta' \cos \phi' \\ y_s' &= y_L - d_{LS} \theta' \sin \phi' \end{aligned}$$

3) Eléments de la modélisation

Une fois ces quelques calculs préliminaires effectués, penchons-nous maintenant sur la méthodologie que nous allons utiliser pour calculer puis afficher les sources virtuelles, donc les mirages gravitationnels.

Nous avons déjà dit dans le premier chapitre que les sources seront considérées comme ponctuelles ; une source étendue sera donc composée d'un certain nombre de sources ponctuelles . Chacune de ces sources va créer son propre mirage gravitationnel et la superposition de tous les mirages donnera le mirage gravitationnel de la source étendue .

La lentille , étant un amas , sera composée d'un ensemble de sources de potentiel gravitationnel , les galaxies . Chaque source de potentiel ne donnera pas , comme précédemment , un ensemble de mirages , mais contribuera à la déviation de chacun des photons venant de la source .

Ainsi , par exemple , considérons le cas d'un amas composé de deux galaxies . Le photon arrivant dans la direction de la source est dévié par la première galaxie ; nous en déduisons une nouvelle direction de propagation . Nous prenons cette nouvelle direction comme direction d'incidence en avant de la lentille ; la seconde galaxie donne alors une troisième direction de propagation , celle du photon après la lentille .

Ce processus peut alors se généraliser à un nombre de galaxies quelconque ...

Il faudra donc , dans notre programme de simulation , introduire une boucle afin de pouvoir déterminer la direction de propagation après la lentille , connaissant uniquement le paramètre d'impact (la distance de plus approche des galaxies , que nous définirons) et les données relatives aux sources .

Comment maintenant connaître les endroits du plan lentille où les photons incidents iront dans notre direction d'observation après déviation de la lentille ?

Ne connaissant pas à priori ces endroits , sauf dans des cas extrêmement simples , nous allons devoir " balayer " le plan lentille de manière judicieuse afin de déterminer les paramètres d'impact qui nous intéressent , et d'où émergeront les photons qui iront dans notre direction d'observation .

La méthode de balayage la plus classique , mais pas nécessairement la plus fine , serait de prendre un quadrillage sur le plan lentille et d'effectuer le calcul en chacun des points de la maille . Cette méthode possède l'avantage d'être particulièrement simple à programmer mais ne convient pas à notre problème .

Notre choix va plutôt se porter sur une méthode plus astucieuse . Nous allons quitter ce balayage systématique carré pour nous orienter vers un balayage en spirale à pas constant .

Ce type de procédé possède les avantages suivants : tout d'abord , dans les simulations que nous allons effectuer , les galaxies et les sources seront presque quasiment alignées dans la direction d'observation .

En partant de l'origine , nous pourrons observer rapidement les mirages qui sont généralement très proches de la galaxie défectrice , et sont enfouis dans la lumière émise par la galaxie .

D'autre part , comme les éléments de la lentille sont à symétrie sphérique , il est plus judicieux de choisir un balayage circulaire , dont la distance à l'origine variera linéairement ; les arcs qui nous observerons se formeront tracés quasiment d'un bout à l'autre , alors qu'un balayage carré ne permettra pas cet avantage .

Cette méthode de balayage par une spirale à pas constant possède de nombreux avantages . Malheureusement , si nous désirons une certaine précision sur la position des mirages gravitationnels , la durée de simulation sera très longue . Ainsi , nous n'obtiendrons un résultat acceptable que si le pas d'itération de la spirale est très fin .

Une autre méthode , combinée à la précédente , va néanmoins nous permettre de parvenir rapidement au résultat escompté : nous allons repérer par un pas grossier la position virtuelle de bons paramètres d'impact , et , par une méthode d'interpolation très élémentaire , nous allons redéfinir de nouveaux paramètres d'impact , dont la rapide convergence va nous assurer une bonne précision sur la position des mirages gravitationnels .

Nous avons vu au paragraphe précédent que les coordonnées dans le plan observateur d'un photon dévié par la lentille étaient données par :

$$\begin{aligned}x_o &= x_L + d_{OL} \theta' \cos \phi' \\y_o &= y_L + d_{OL} \theta' \sin \phi'\end{aligned}$$

Considérons deux points , représentant l'impact de deux photons provenant d'une même source , dont chacun a été dévié par la lentille pour un paramètre d'impact différent . Nous avons :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{L1} + d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' & \text{ainsi que :} & & x_2 &= x_{L2} + d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' \\y_1 &= y_{L1} + d_{OL} \theta_1' \sin \phi_1' & & & y_2 &= y_{L2} + d_{OL} \theta_2' \sin \phi_2'\end{aligned}$$

A partir de ces deux points , nous allons rechercher un nouveau paramètre d'impact ; ce paramètre d'impact sera déterminé grâce à une interpolation linéaire .

Nous recherchons donc les paramètres liés à deux droites , une pour chacune des coordonnées x et y : $x_L = a x_o + b$ et $y_L = c y_o + d$.

Comme nous recherchons x_L et y_L pour que le photon arrive à l'origine dans le plan observateur , nous prenons : $x_L = b$ et $y_L = d$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}x_{L1} &= x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' & \text{et} & & x_{L1} &= a x_1 + b \\x_{L2} &= x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' & \text{et} & & x_{L2} &= a x_2 + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{En identifiant les termes :} & & x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' &= a x_1 + b \\ & & x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' &= a x_2 + b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ou encore :} & & x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' - b &= a x_1 \\ & & x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' - b &= a x_2\end{aligned}$$

En divisant la première ligne par la seconde , nous obtenons :

$$\frac{x_1 - d_{OL} \theta_1' \cos \phi_1' - b}{x_2 - d_{OL} \theta_2' \cos \phi_2' - b} = \frac{x_1}{x_2}$$

En développant l'expression , nous parvenons à l'expression suivante :

$$x_1 x_2 - d_{OL} \theta_1' x_2 \cos \phi_1' - b x_2 = x_1 x_2 - d_{OL} \theta_2' x_1 \cos \phi_2' - b x_1$$

Ce qui nous permet de conclure que : $d_{OL} (\theta_1' x_2 \cos \phi_1' - \theta_2' x_1 \cos \phi_2') = b(x_1 - x_2)$

Alors , comme $x_L = b$, nous aurons :

$$x_L = \frac{d_{OL}(\theta_1' x_2 \cos \phi_1' - \theta_2' x_1 \cos \phi_2')}{x_1 - x_2}$$

En effectuant exactement le même raisonnement pour d , nous obtenons :

$$y_L = \frac{d_{OL}(\theta_1' y_2 \sin \phi_1' - \theta_2' y_1 \sin \phi_2')}{y_1 - y_2}$$

Si les paramètres d'impact des deux photons 1 et 2 ne sont pas trop éloignés , nous nous rapprocherons de l'origine dans le plan observateur ; nous gagnerons donc en précision sur la position des mirages gravitationnels .

Il suffira en outre de refaire ce calcul plusieurs fois , en gardant toujours la valeur calculée de l'impact dans le plan observateur , mais aussi la précédente , ce qui nous permettra de nous rapprocher par itérations du résultat idéal .

Quand les photons défléchis arriveront dans la direction de l'observateur à une erreur que nous fixerons , ils seront visibles et nous serons alors en mesure de les afficher sur l'écran graphique .

VI. EXEMPLES D'APPLICATION

Nous allons , dans les pages qui vont suivre , donner quelques exemples d'application de ce programme que nous venons de décrire .

Nous effectuerons ainsi quatre séries de simulations :

Les deux premières séries nous permettront de visualiser l'évolution de la position des mirages si un paramètre évolue .

De même , dans les deux dernières séries , nous tenterons de montrer que certaines configurations très différentes conduisent pourtant au même résultat .

1) Première série de simulations

Dans cette première série de simulations , nous considérons la configuration suivante :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 seule source
- Nombre de galaxies : 1 seule galaxie
- Masse de la galaxie : 10.000 milliards de masses solaires
- Situation de la source : il s'agit du paramètre que nous allons faire évoluer

Nous allons donc , pendant les cinq prochaines simulations , prendre des situations de sources différentes .

Pour notre première simulation , la source sera exactement dans l'axe de visée de la galaxie , l'écart angulaire visuel pour l'observateur sera donc nul .

Cette configuration permet alors d'obtenir un cercle parfait , le cercle d'Einstein .

Pour les simulations suivantes , nous supposerons que la source se trouve au-dessus de la galaxie du plan lentille , à des écarts angulaires croissants .

Elle sera ainsi située à une demi-seconde d'arc , une seconde d'arc , deux secondes d'arc et quatre secondes d'arc au-dessus de la galaxie défectrice .

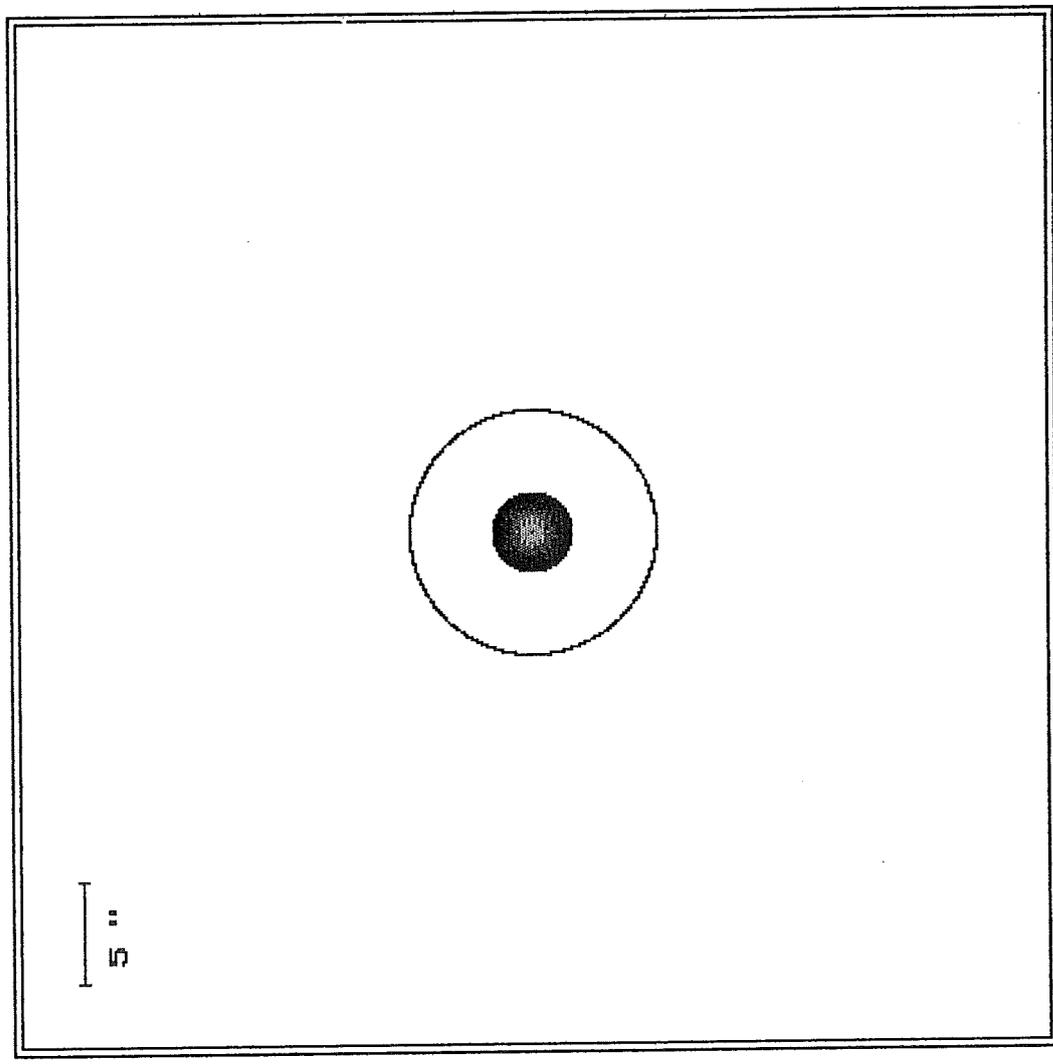
Ces quatre simulations montrent un décalage des mirages vers le haut , avec une diminution de l'étendue des arcs , pour parvenir , enfin , pour un décalage angulaire de quatre secondes d'arc , à un mirage gravitationnel ponctuel .

Nous pouvons aussi remarquer , dans cette série de simulations , que la règle de parité des mirages gravitationnels est respectée . En effet , nous avons vu que le nombre de sources virtuelles était impair , sauf dans le cas du point masse .

Comme nous considérons que le potentiel possède un rayon de coeur , le nombre de mirages est impair . Dans chacune des simulations , nous pouvons remarquer la présence , à l'intérieur même de la galaxie , d'un petit point qui n'est autre que le troisième mirage .

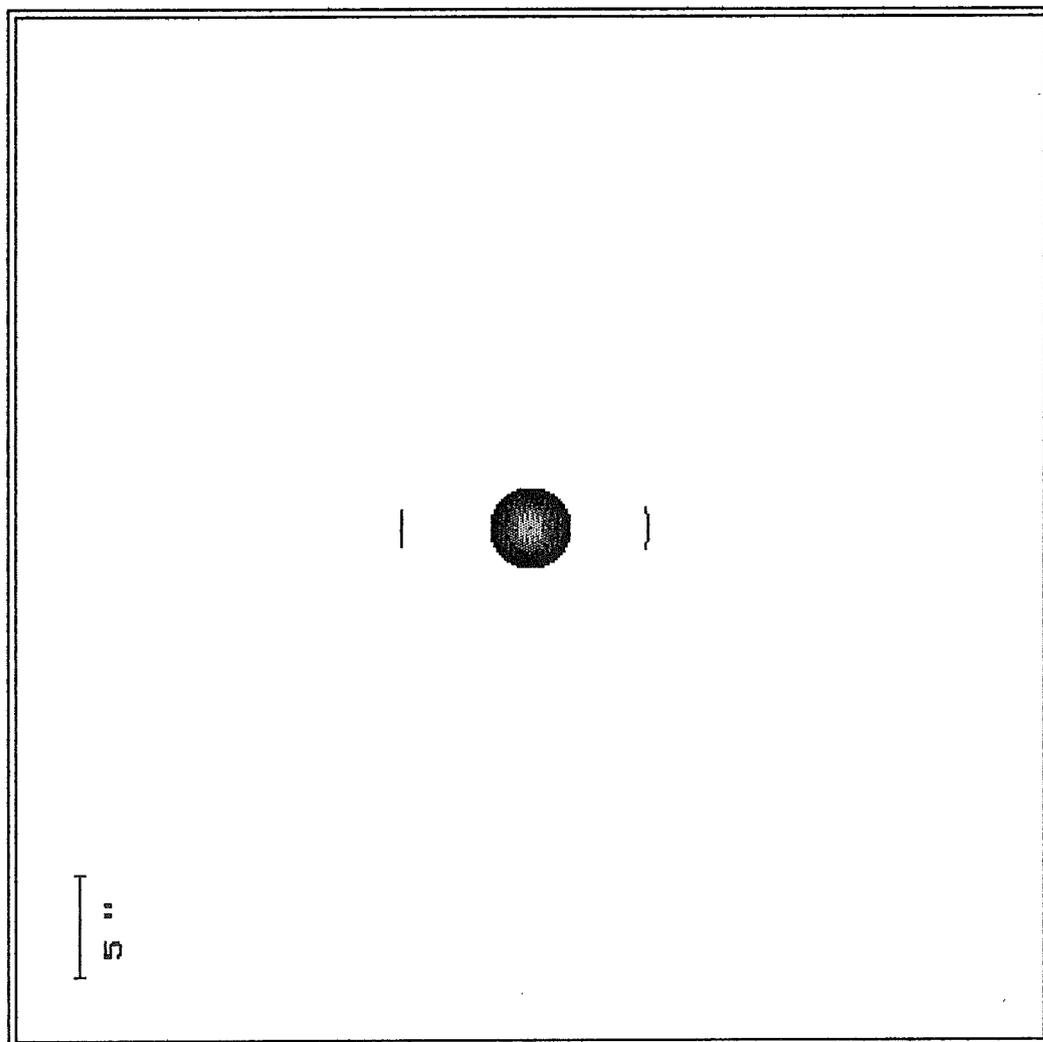
Dans le cas du cercle d'Einstein , nous avons également trois mirages . L'un d'eux est exactement situé au centre de la galaxie , et les deux autres sont des arcs en demi-cercle .

DOS : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 1



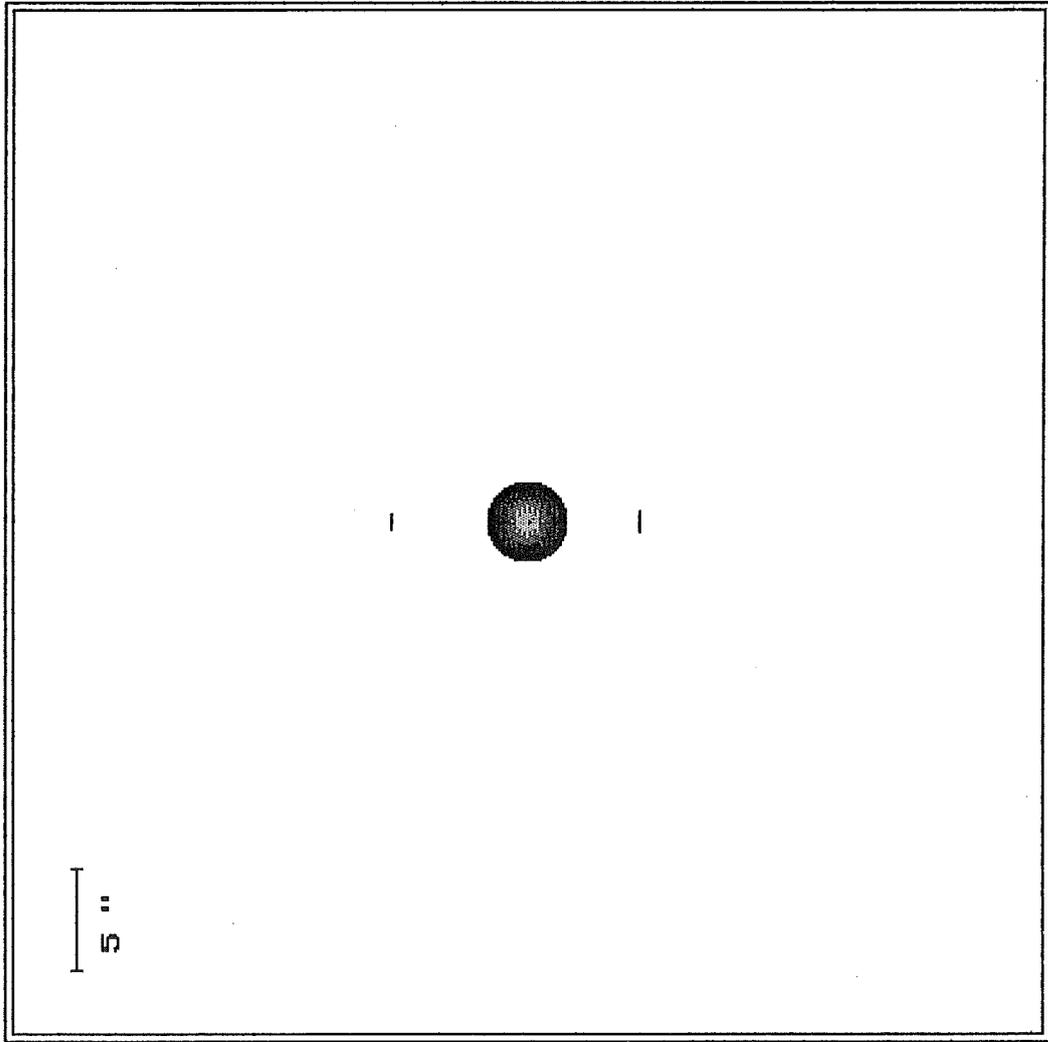
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 1



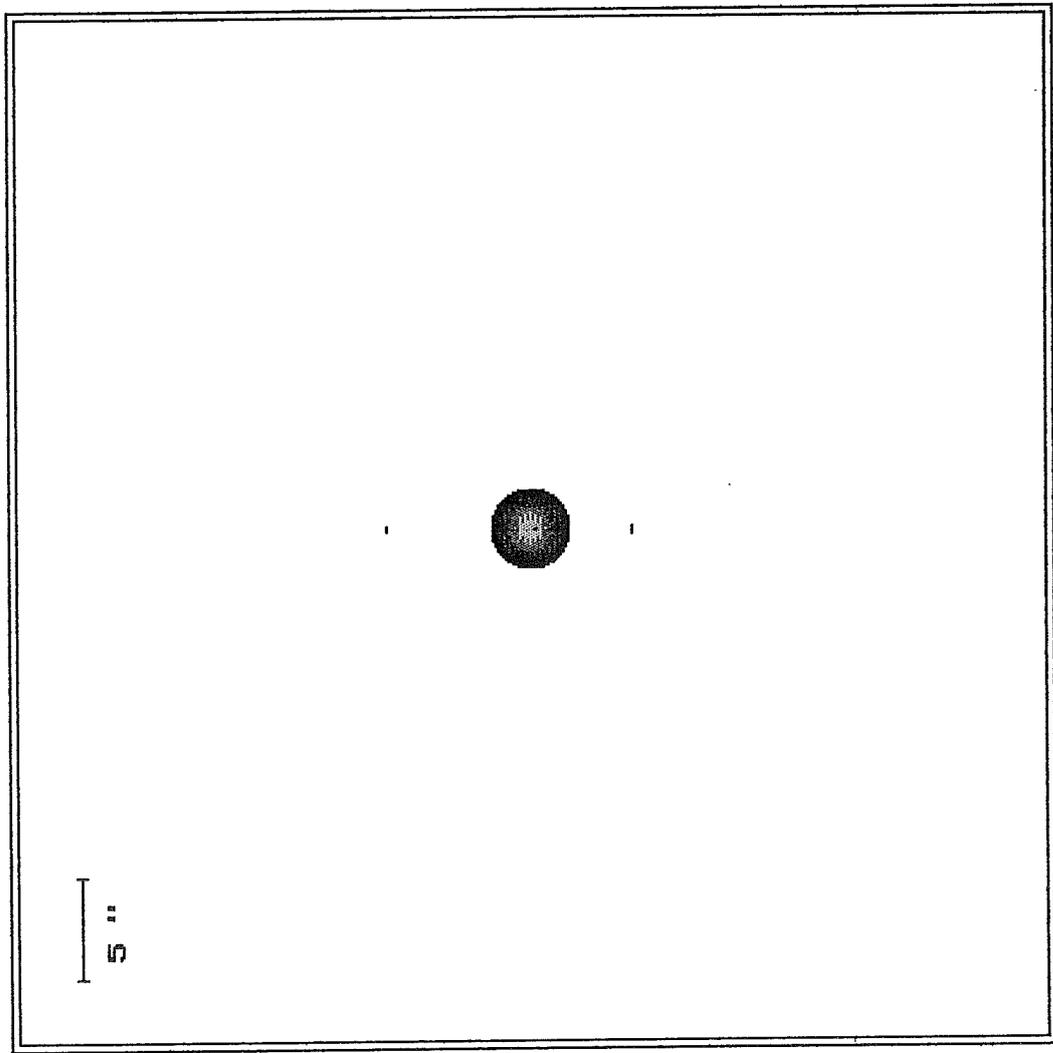
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 1



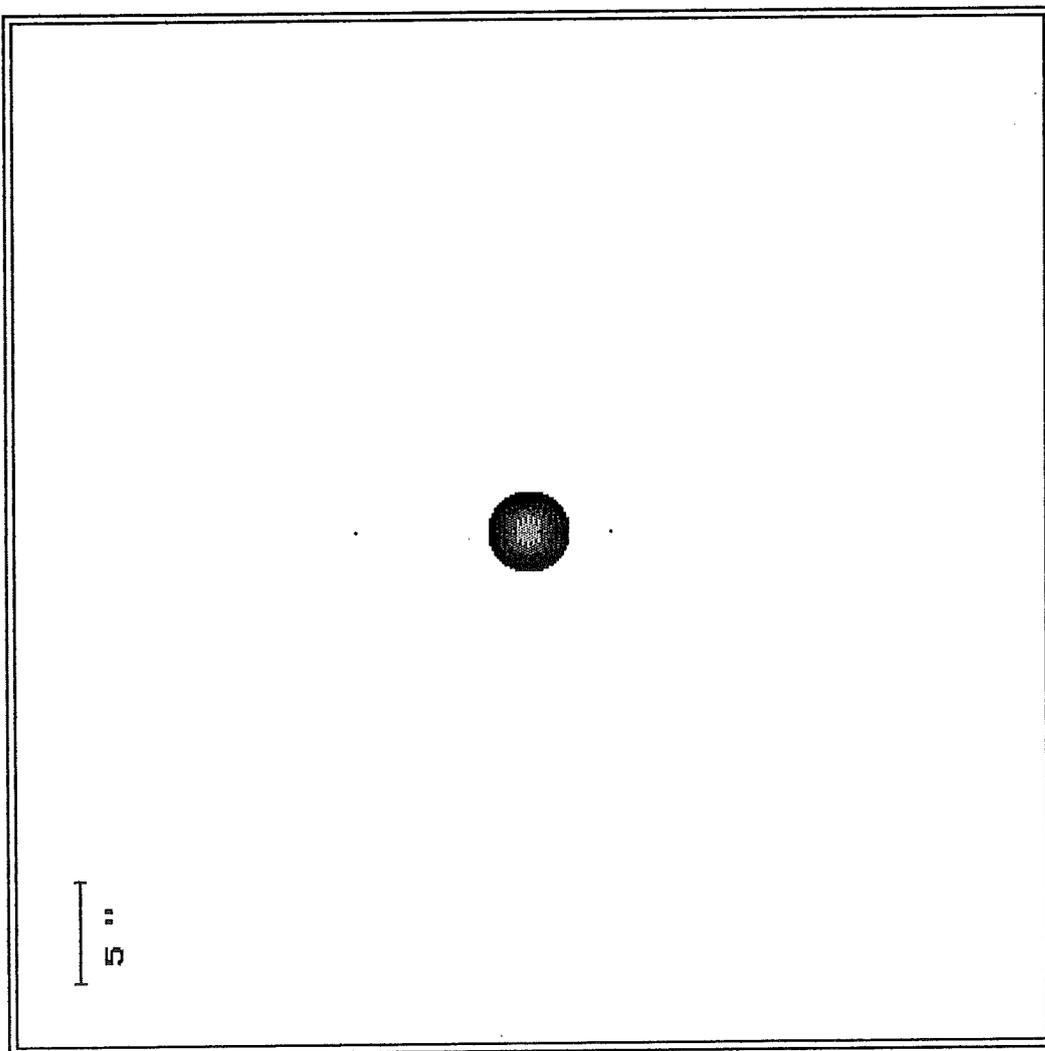
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 1



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 1



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

2) Deuxième série de simulations

Dans cette deuxième série de simulations , nous considérons la configuration suivante :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 seule source
- Nombre de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Situation de la source : il s'agit du paramètre que nous allons faire évoluer

Nous allons donc , pendant les cinq prochaines simulations , prendre des situations de sources différentes .

Pour notre première simulation , la source sera exactement confondue avec le centre du segment joignant les deux galaxies . L'écart angulaire entre le centre du segment joignant les deux galaxies et la source est donc nul .

Cette configuration permet alors d'obtenir une croix , la croix d'Einstein .

Pour les simulations suivantes , nous supposerons que la source se trouve au-dessus du centre de masse des deux galaxies du plan lentille , les masses des galaxies étant identiques , à des écarts angulaires croissants .

Elle sera ainsi située à une demi-seconde d'arc , une seconde d'arc , deux secondes d'arc et quatre secondes d'arc au-dessus de ce centre de masse .

Ces quatre simulations , comme dans la première série , montrent un décalage des mirages vers le haut .

De plus , dans les cas où les écarts angulaires sont de une demi-seconde et une seconde d'arc , les arcs correspondant sont très étendus . Les arcs situés sur les extrémités de la barre horizontale de la croix se déplacent vers le bas , suivant un arc de cercle , avant de fusionner en un écart angulaire de la source d'une seconde d'arc .

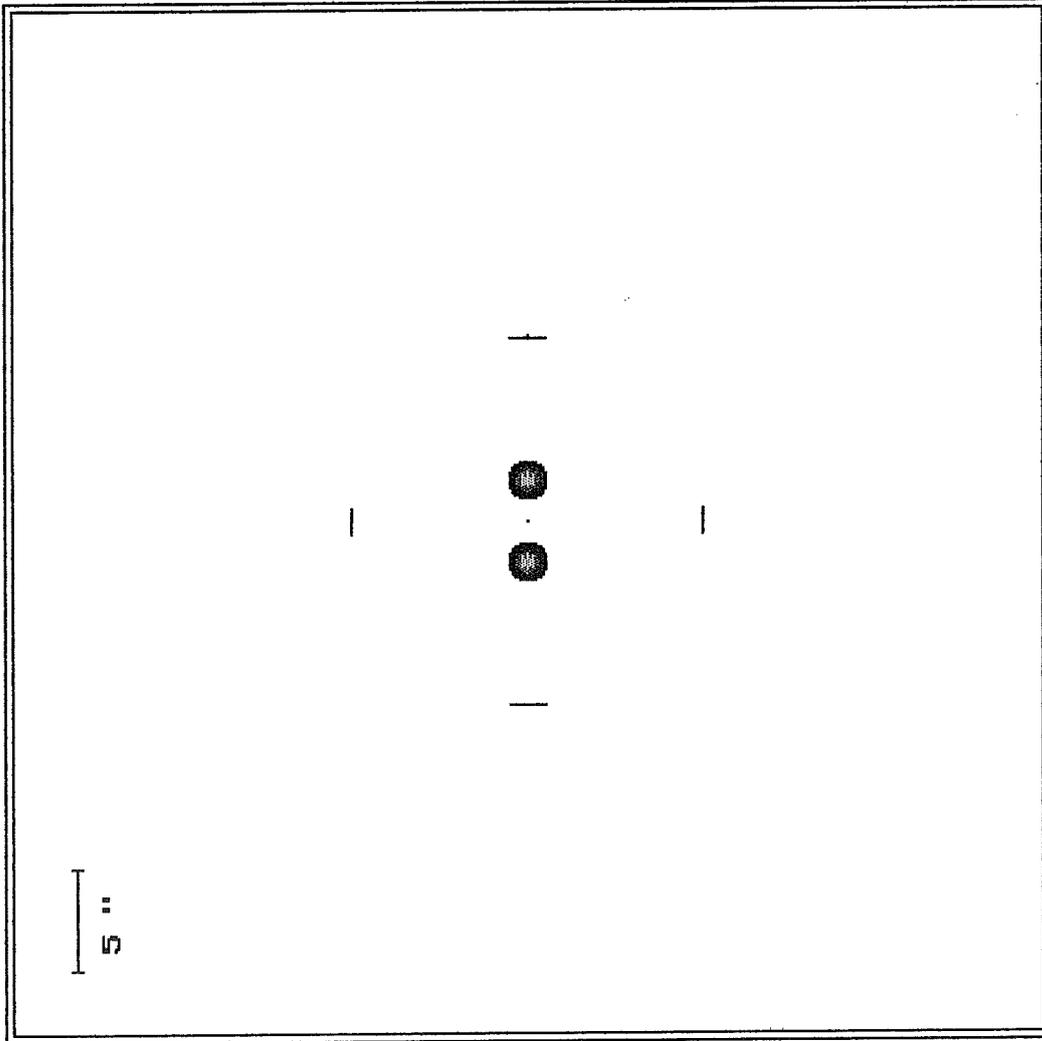
Ensuite , la dimension des arcs devient de plus en plus restreinte et nous parvenons , dans notre dernière simulation , à une structure quasi-ponctuelle de chacun des mirages .

Comme dans la série précédente , nous pouvons vérifier ici la propriété de non-parité du nombre de mirages .

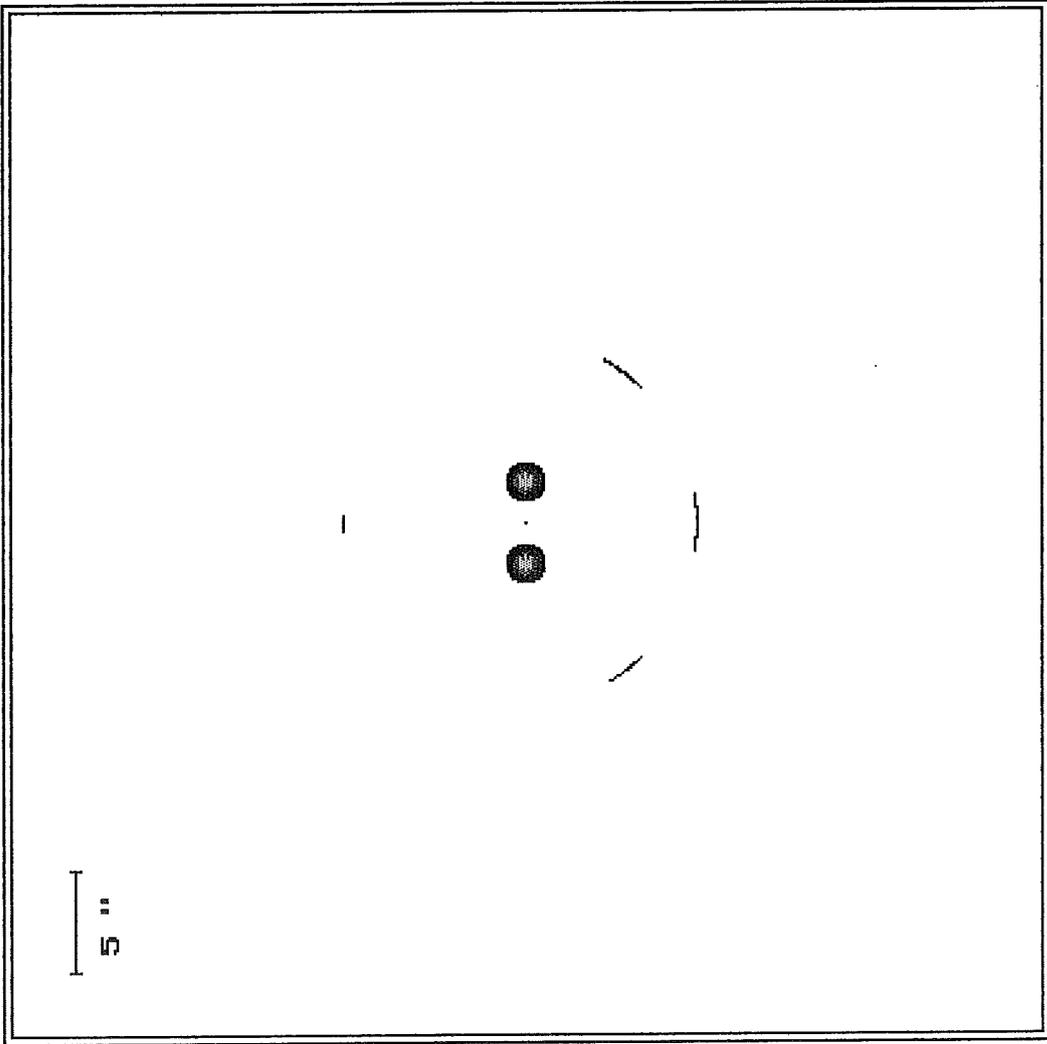
Nous observons dans notre première simulation cinq mirages gravitationnels , dont quatre sont situés aux extrémités d'une croix et la cinquième au centre de cette croix .

Quand les deux mirages situés sur la barre horizontale de la croix fusionnent avec le mirage situé en bas de la barre verticale , il n'y a plus que trois mirages . Ces trois mirages restent visibles jusqu'à la dernière simulation .

Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



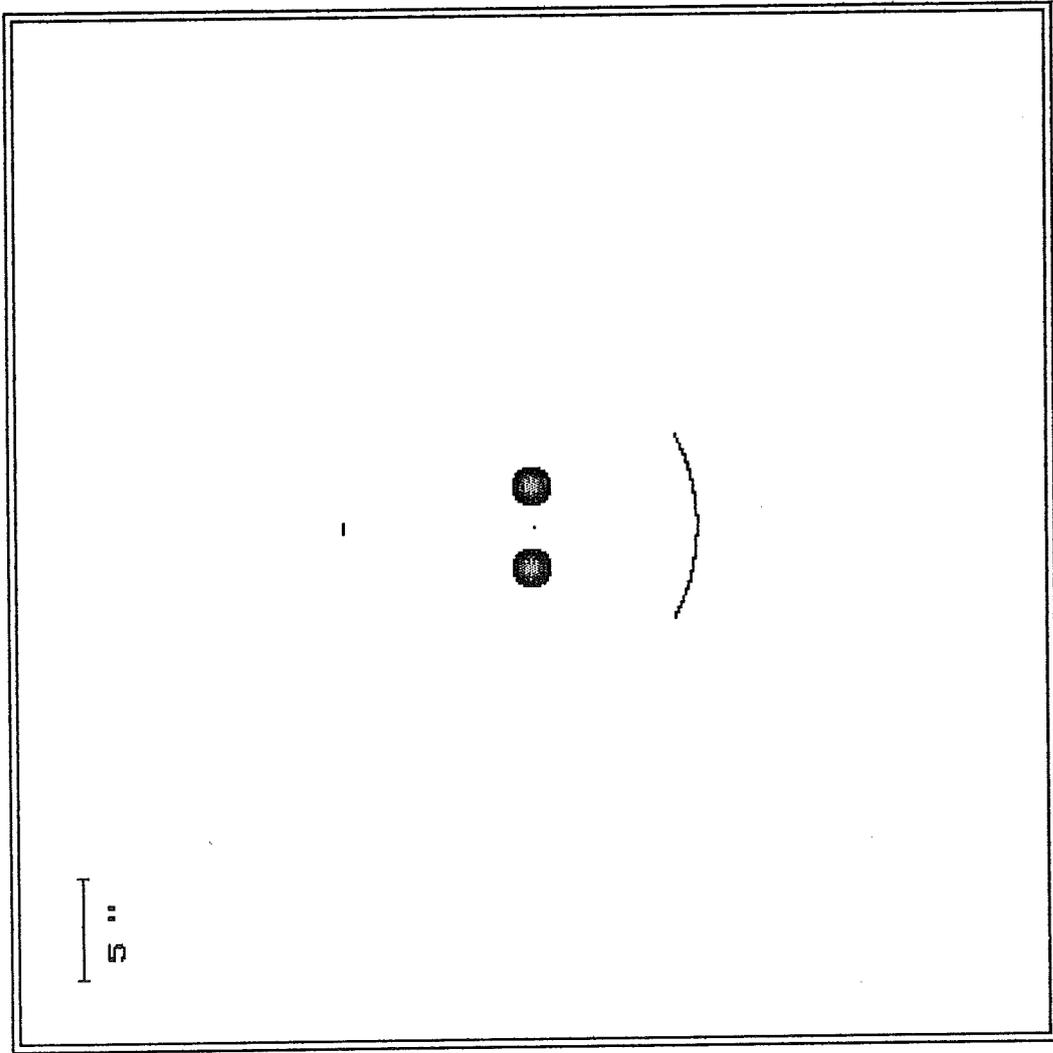
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



D05 : 2.0 Gpc
D01 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2

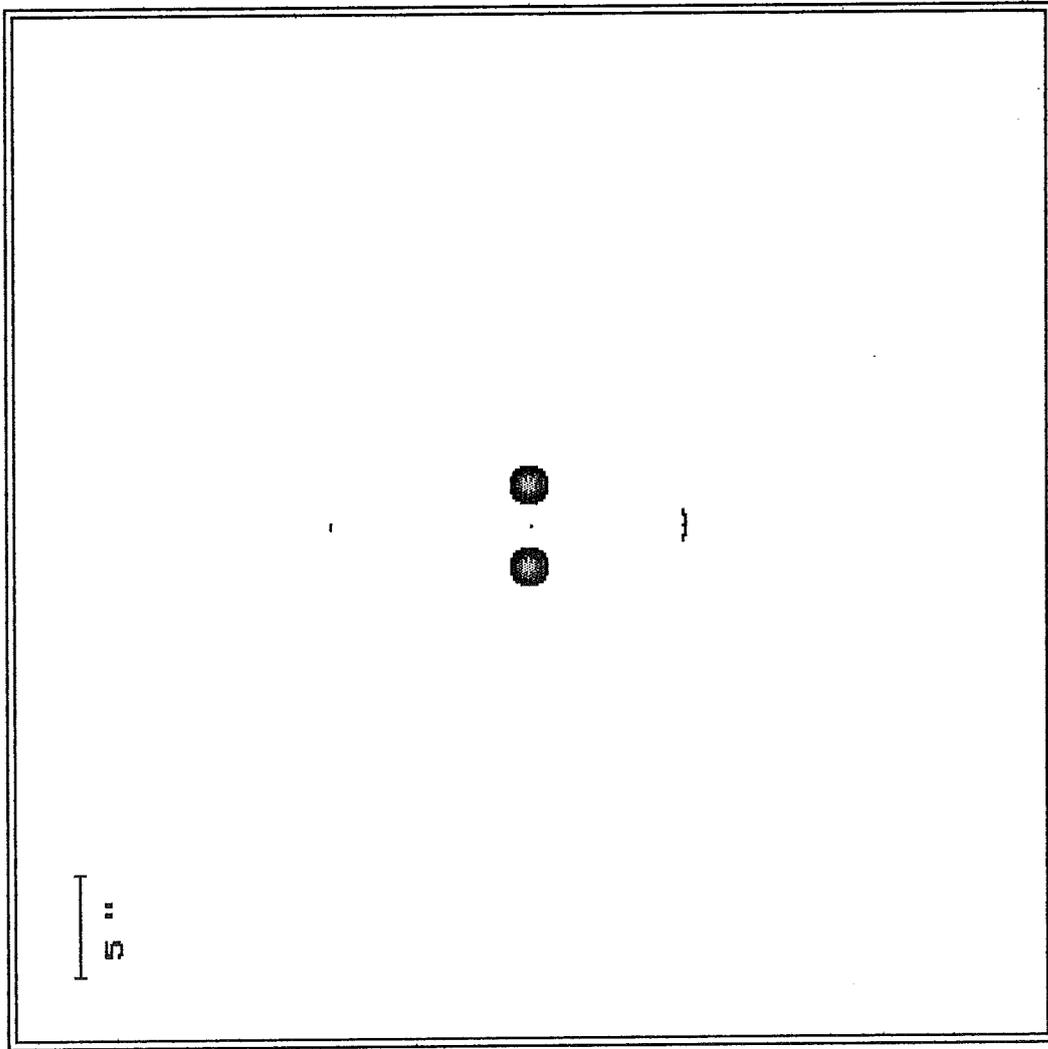
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2

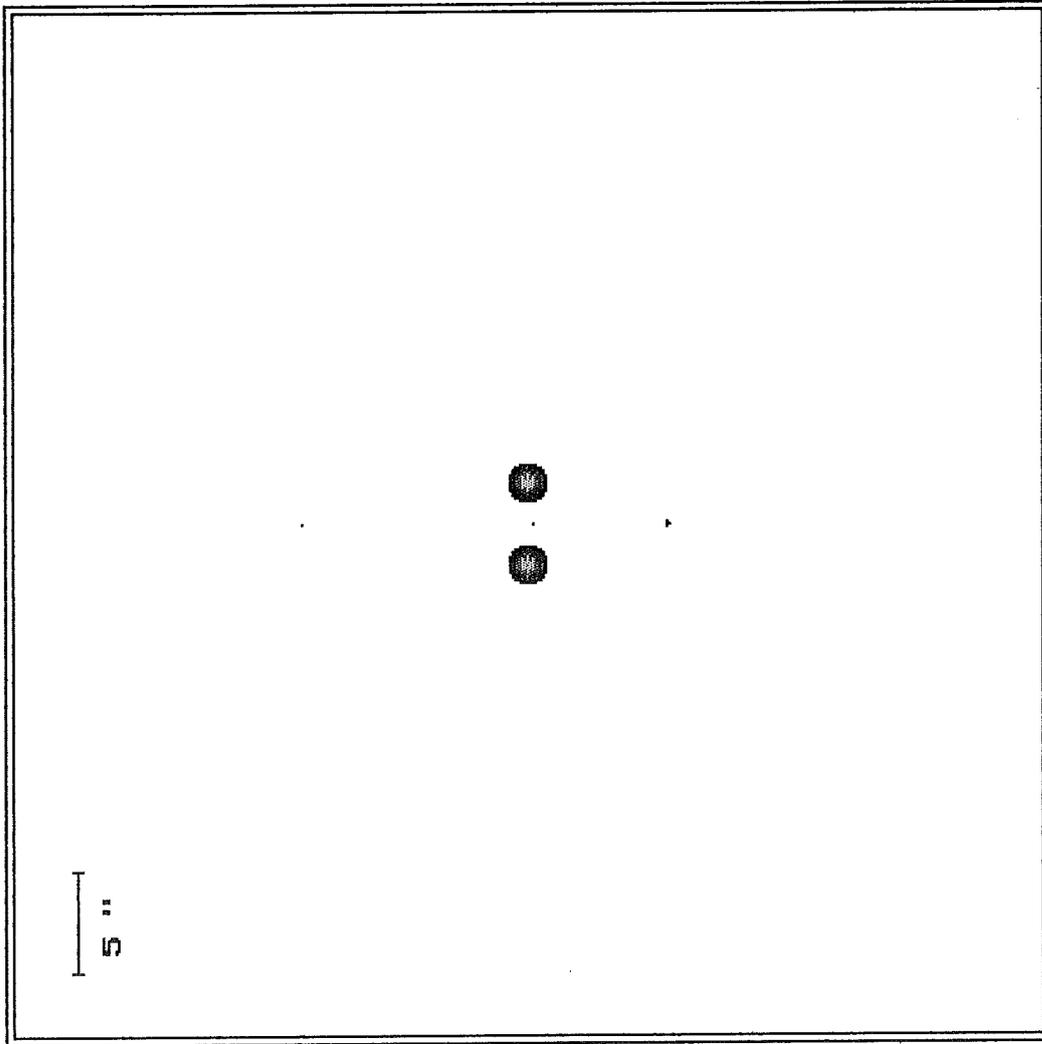


Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2

Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

3) Dernières séries de simulations

Dans les deux dernières séries qui vont suivre , nous allons montrer que l'observation de certaines répartitions de mirages n'appellent pas une configuration unique du problème .

En effet , dans les deux séries qui vont suivre , nous allons prendre des configurations de lentilles très différentes et nous allons pourtant retrouver sensiblement des résultats connus .

Dans le premier cas , nous considérons la configuration suivante :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 seule source
- Nombre de galaxies : 3 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Situation de la source : il s'agit du paramètre que nous allons faire évoluer

Les trois galaxies sont situées au sommet d'un triangle équilatéral .

Nous allons donc , pendant les cinq prochaines simulations , prendre des situations de sources différentes .

Pour notre première simulation , la source sera exactement confondue avec le centre géométrique de triangle dont les sommets sont les galaxies . L'écart angulaire entre le centre de géométrie des galaxies et la source est donc nul .

Cette configuration , contre toute prévision intuitive , donne un magnifique cercle d'Einstein . Ce cercle est de rayon plus grand que celui que nous avons déjà observé dans la première série de simulations . Nous retrouvons également , au centre , le cinquième mirage ponctuel que nous avons déjà observé .

Cette configuration à trois galaxies équivaut donc à celle d'une configuration à une galaxie .

Pour les simulations suivantes , nous supposons que la source se trouve au-dessus du centre de masse des trois galaxies du plan lentille , les masses des galaxies étant identiques , à des écarts angulaires croissants .

Elle sera ainsi située à une demi-seconde d'arc , une seconde d'arc , deux secondes d'arc et quatre secondes d'arc au-dessus de ce centre de masse .

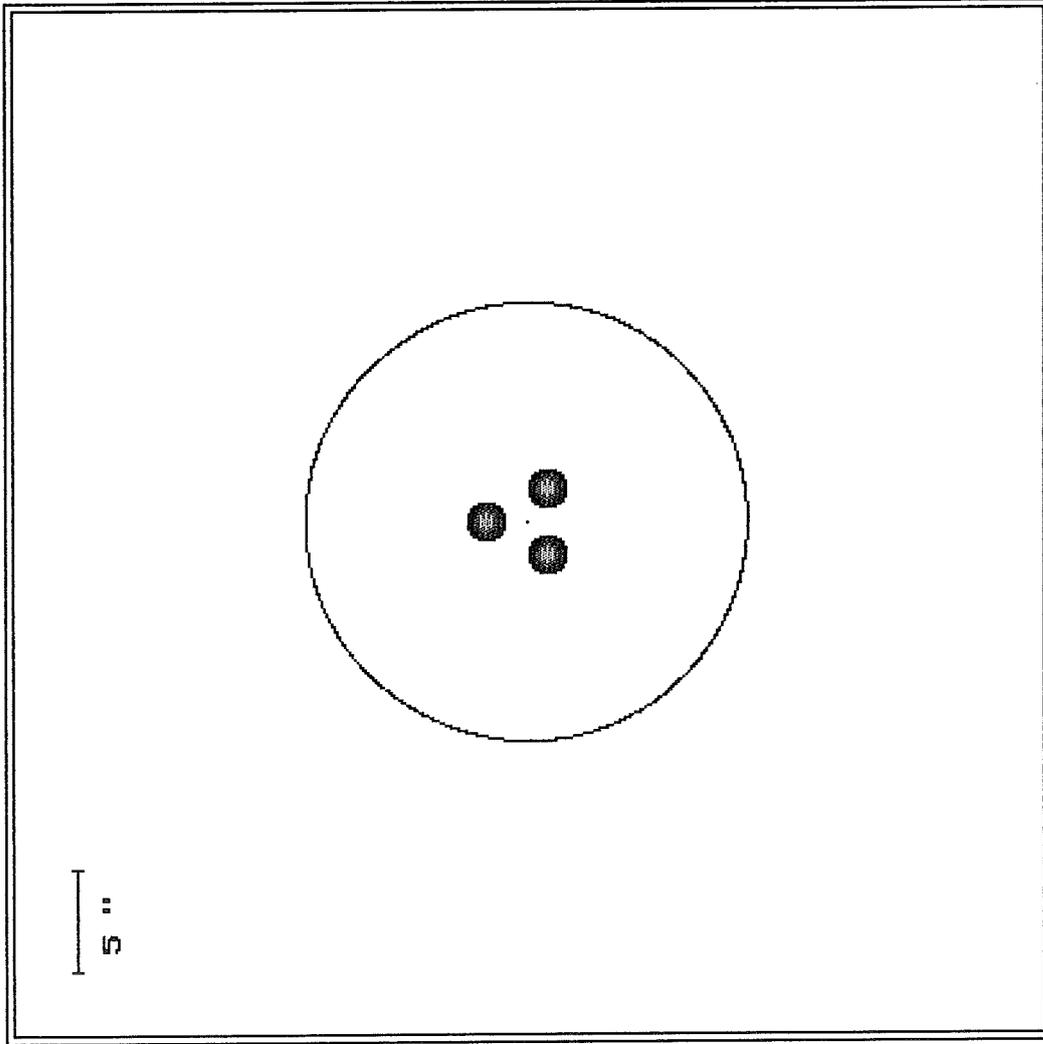
Nous retrouvons , là aussi , sensiblement les mêmes résultats . Les arcs sont légèrement plus étendus , mais la répartition spatiale reste identique à celle que nous avons déjà observée.

Dans le second cas , nous considérons une configuration à quatre galaxies de masses identiques , situées aux sommets d'un carré .

Nous retrouvons là encore le cercle d'Einstein , plus étendu que précédemment grâce à la masse totale plus grande de la lentille . Ici aussi , un mirage central apparaît .

Si nous effectuons les mêmes évolutions , les mêmes effets se font remarquer

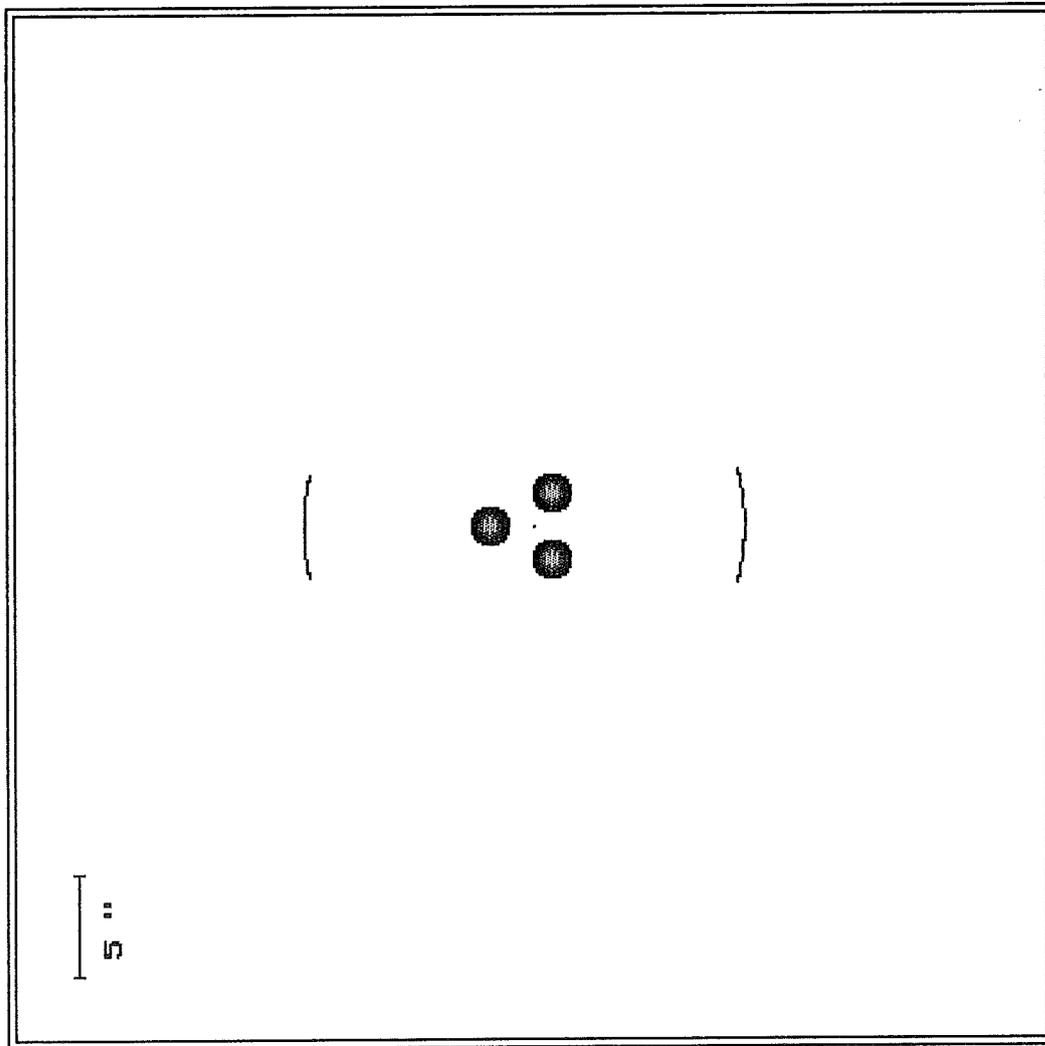
Il est donc très ardu de vouloir , à partir de l'observation , prévoir sans précaution la répartition spatiale des galaxies créant cette déflexion gravitationnelle .



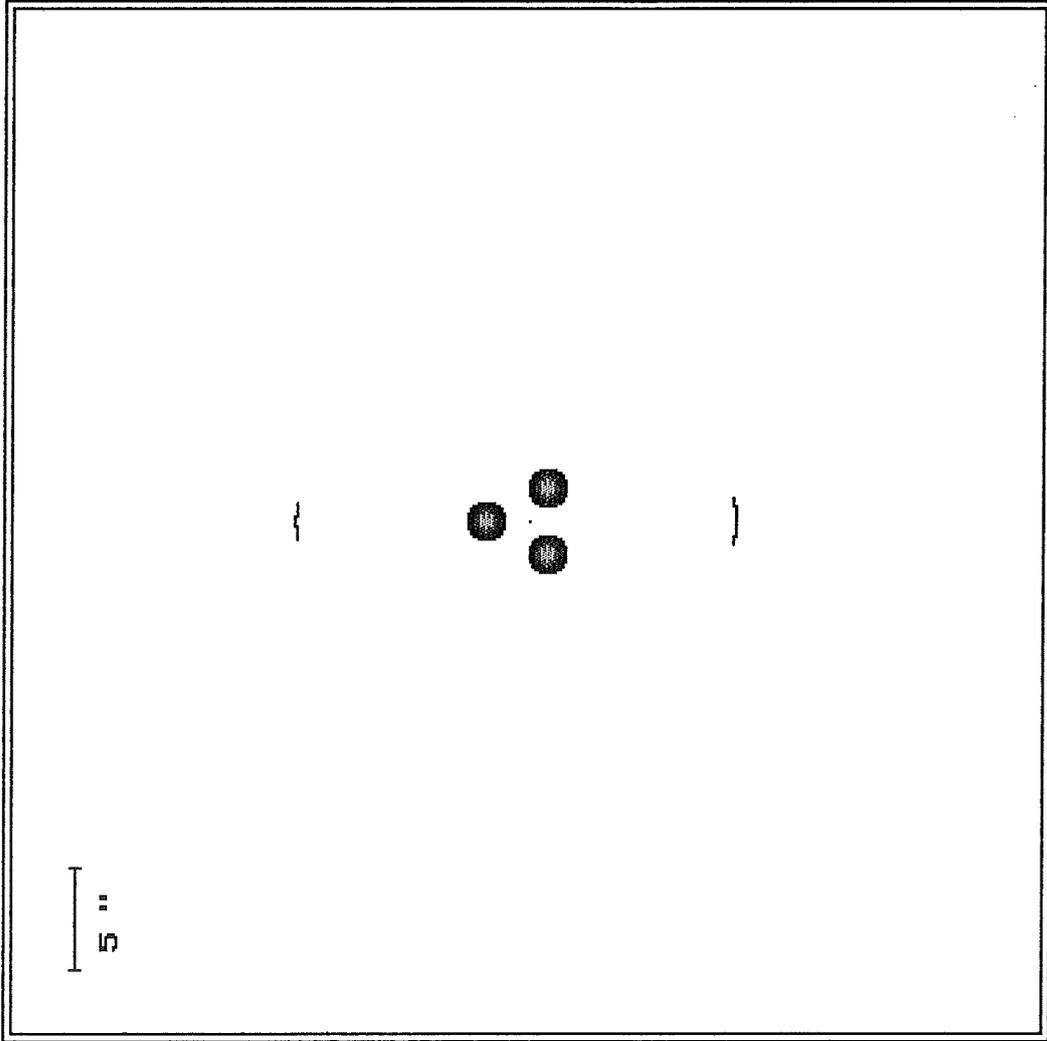
Dos : 2.0 Gpc
DoI : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3

Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Dol : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3



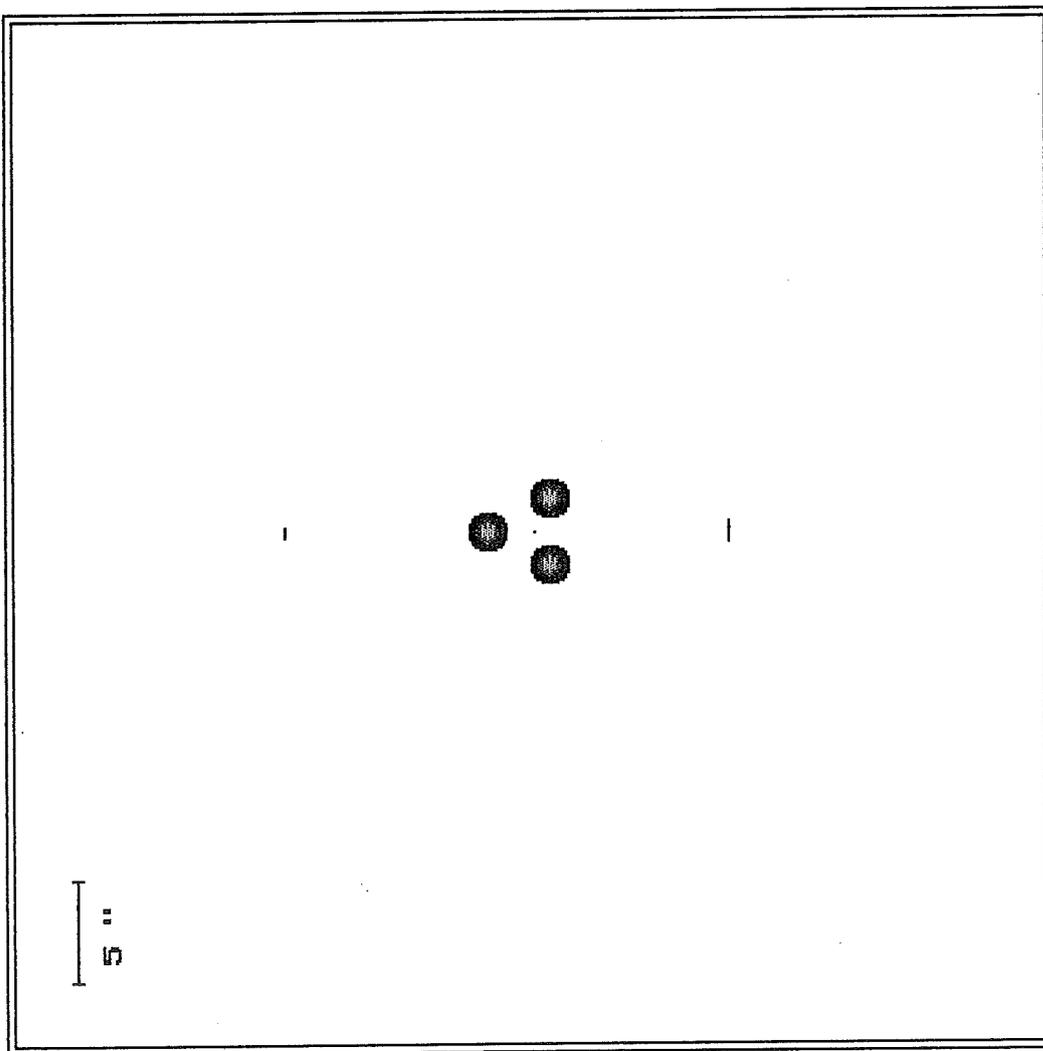
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



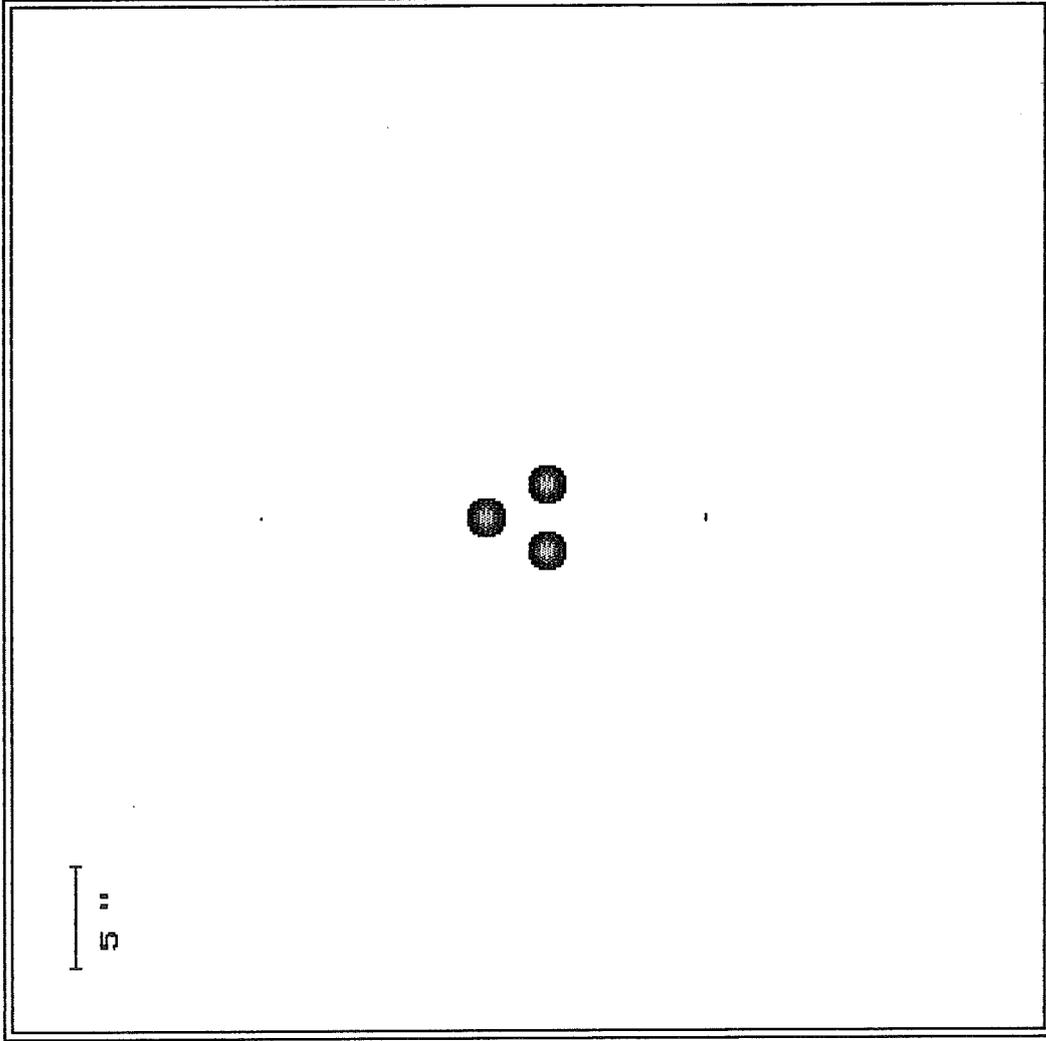
Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3

Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3



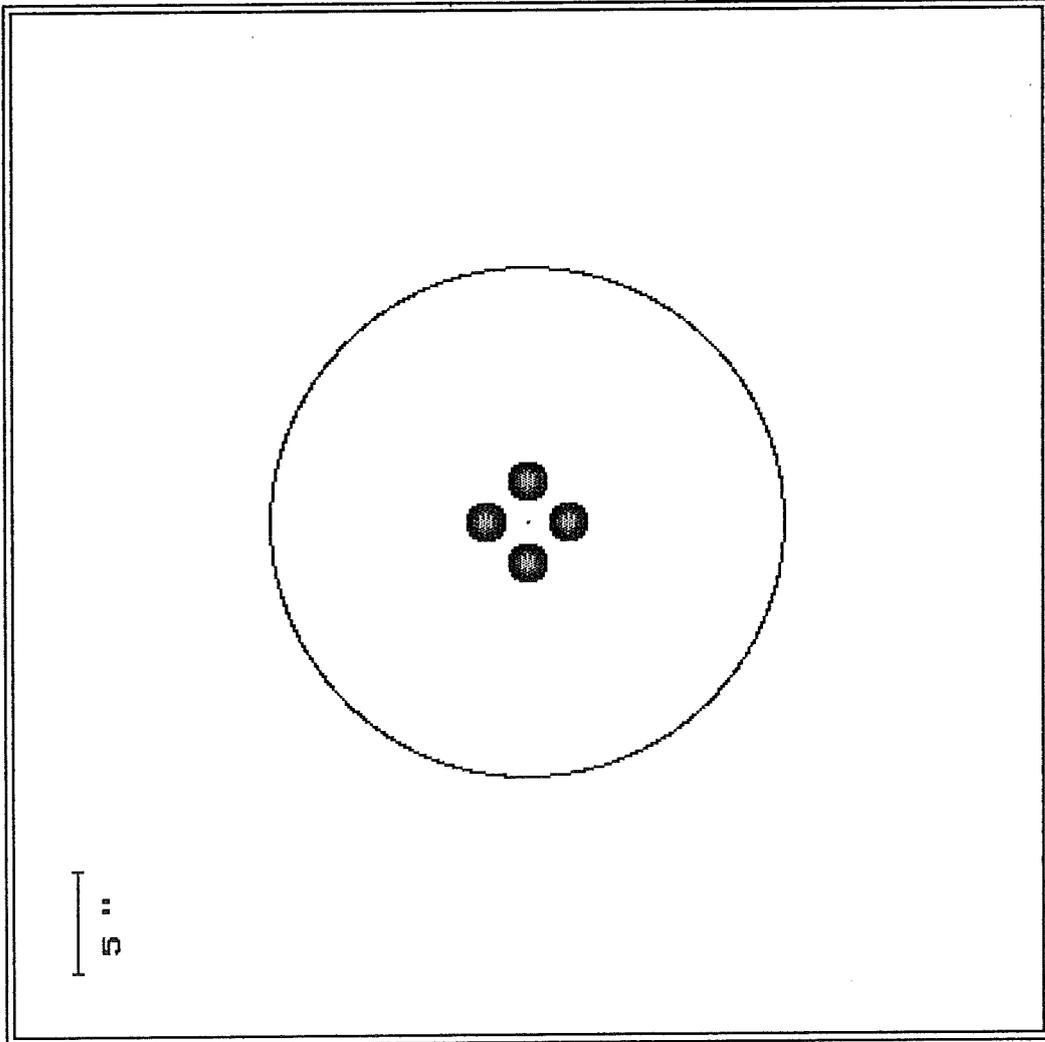
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 3

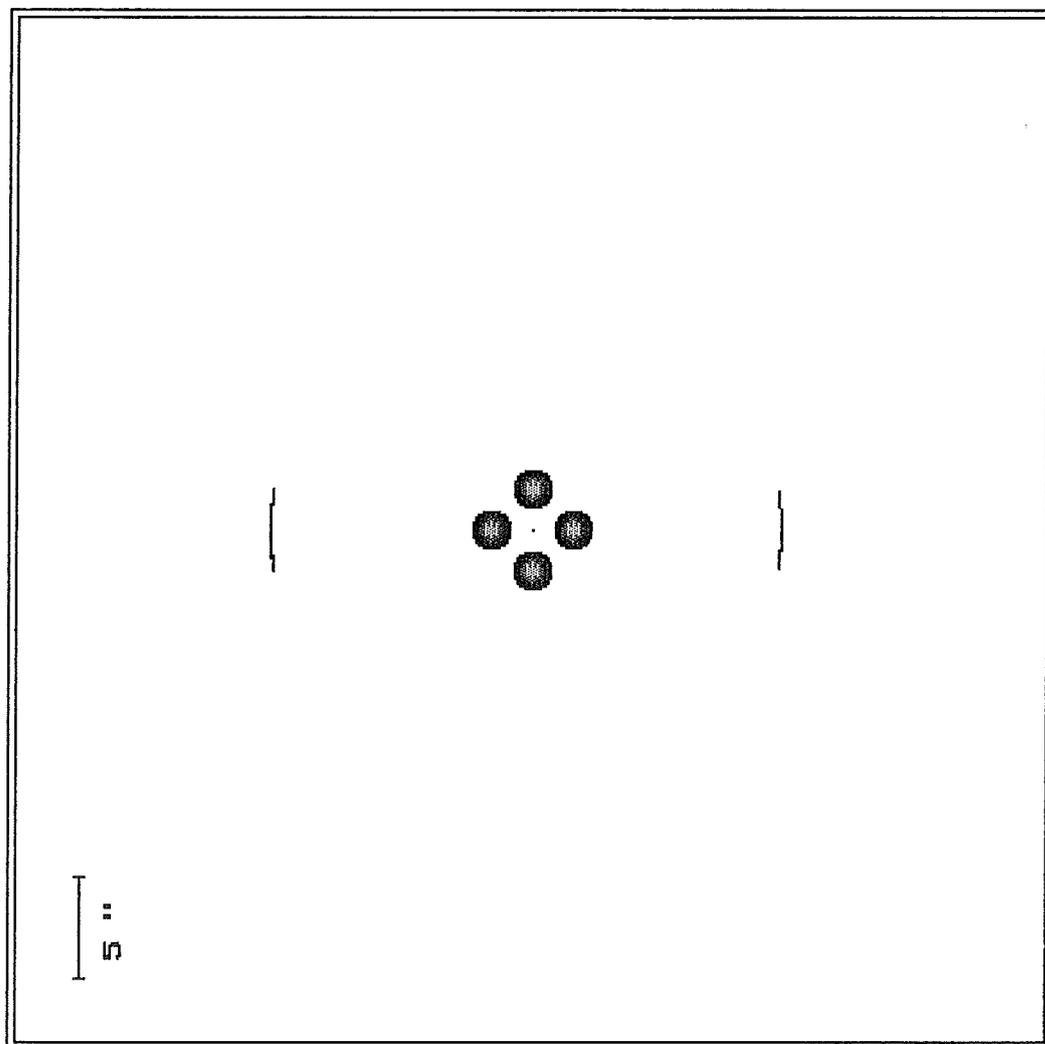
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4



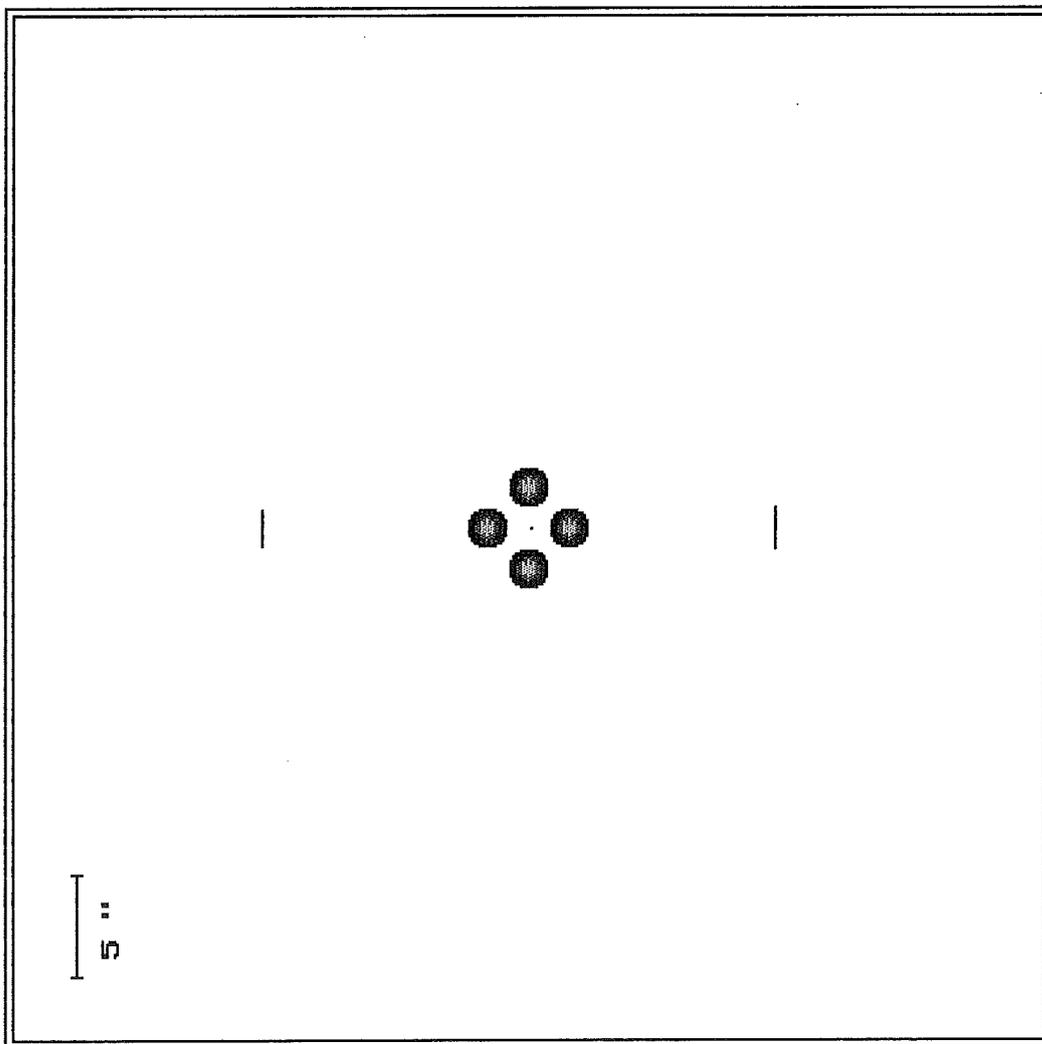
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4



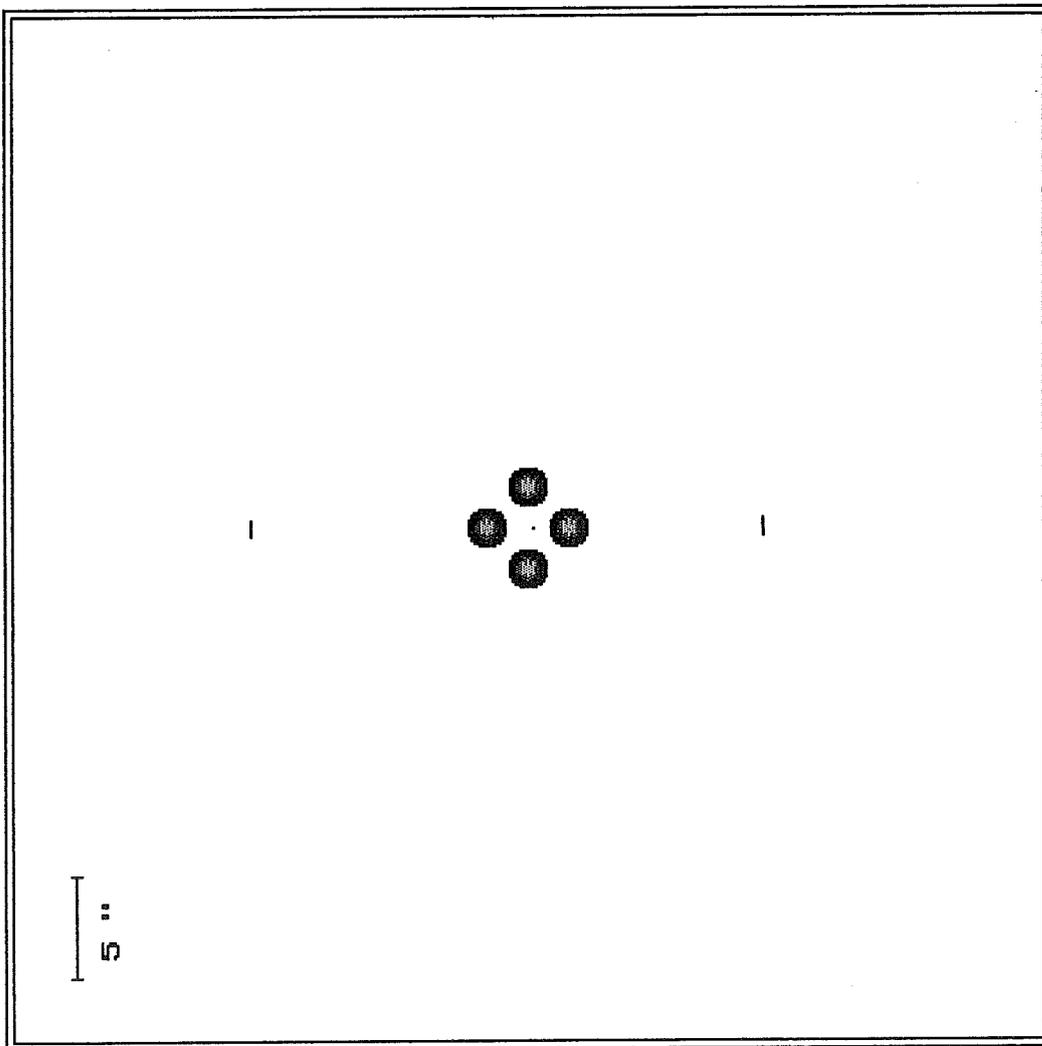
Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4

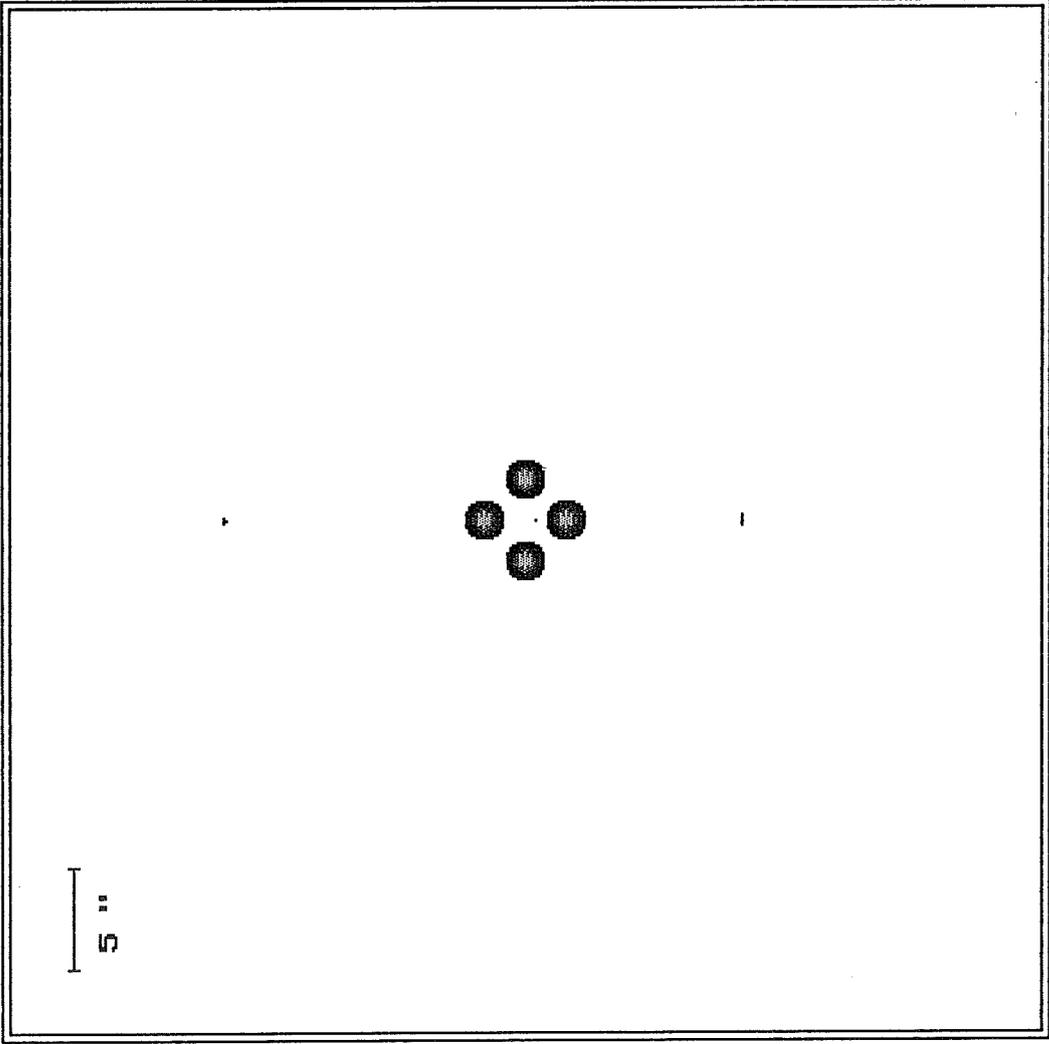


Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

D05 : 2.0 Gpc
D01 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle



Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 4

Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

ABELL 370

Nous avons tenté de retrouver , par notre simulation , le premier arc géant découvert par G. Soucail , Y. Mellier , B. Fort , G. Mathez et J.P. Picard de l'observatoire de Midi-Pyrénées de Toulouse .

La découverte de cet arc géant , le premier du genre , a été annoncé en 1986 .

La photographie , à droite de la simulation , a été prise en 1987 grâce au télescope franco-canadien de 3,60 mètres (C.F.H.T. : Canadian France Hawai Telescop) .

Cet observatoire astronomique , situé sur le sommet du Mauna Kea , à 4200 mètres d'altitude , dans l'archipel hawaïen , bénéficie de conditions exceptionnelles d'observations .

Afin de s'approcher de la configuration observée , nous avons pris les paramètres suivants :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 source
- Nombres de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Distance séparant les 2 galaxies : 4 secondes d'arc
- Situation de la source : 1 seconde d'arc au-dessus des deux galaxies , dans l'axe

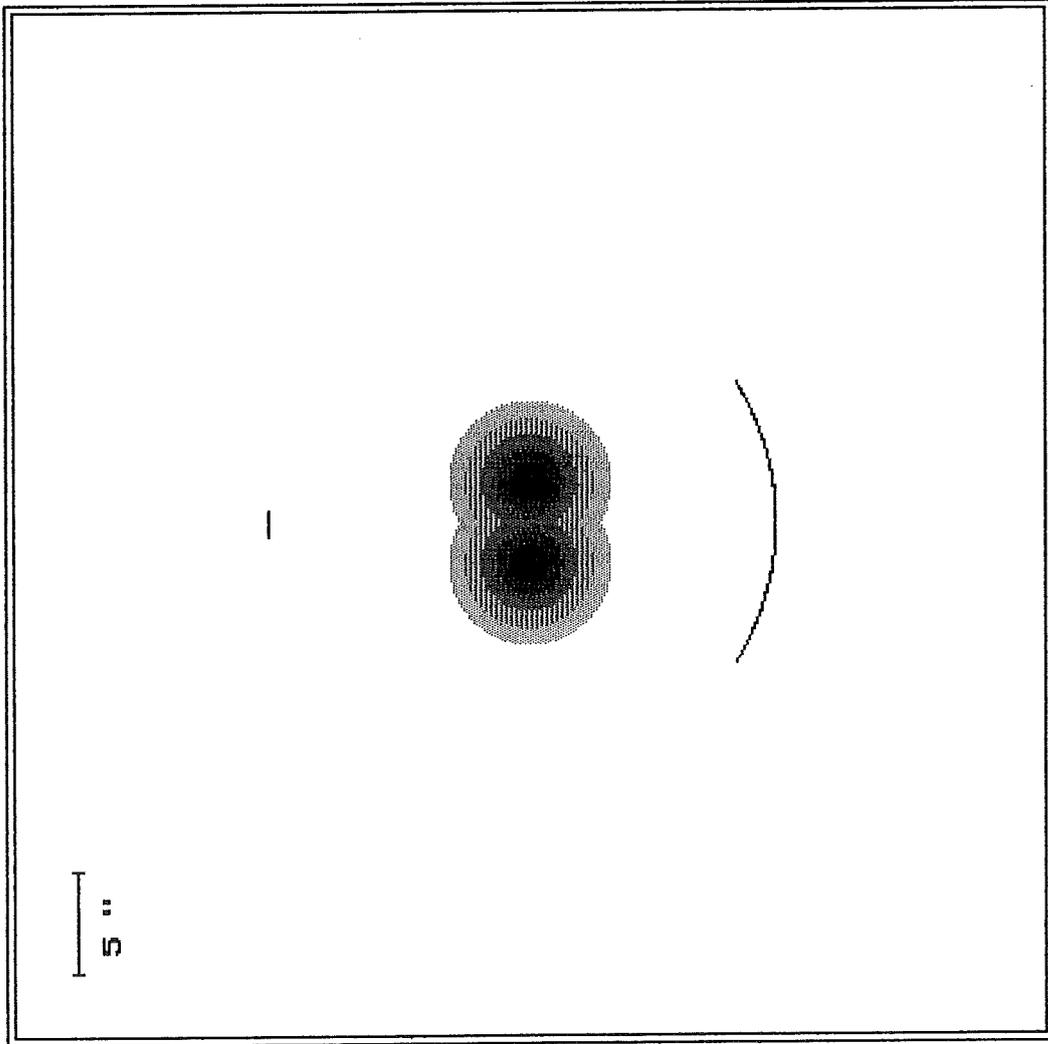
Nous avons retrouvé , dans notre simulation , un grand arc étendu au-dessus des galaxies défectives . Cet arc étendu , que nous avons déjà remarqué dans le chapitre sur les exemples d'application , est la réunion de trois arcs fusionnant en un seul .

Nous retrouvons , également , un deuxième mirage situé au-dessus des galaxies défectives . Cet arc n'est pas visible sur la photo .

Par contre , nous ne retrouvons pas au centre la troisième image , en fait la cinquième de cette configuration de simulation . Nous estimons cette anomalie à un défaut d'itération .

Bien que le mirage gravitationnel soit produit par tout l'amas , nous pouvons remarquer qu'une galaxie , située au-dessus de l'arc géant sur la photo correspond à notre position de galaxie dans la simulation .

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

CROIX D'EINSTEIN : 2237 + 0305

Nous avons tenté ici de retrouver cette croix d'Einstein , autre configuration observée de mirages gravitationnels .

Edward Horine , puis John Huchra découvrirent qu'un quasar se trouvait exactement au centre d'une galaxie , en 1984 . La puissance du télescope franco-canadien permit , dans les années qui suivirent , de déceler quatre images parfaitement identiques du quasar , situées aux sommets d'une croix .

L'image , à droite de la simulation , prise donc au C.F.H.T. , comporte cinq points lumineux .

Quatre de ces points représentent les quatre sources virtuelles d'un quasar , dont les rayons lumineux ont été déviés par la masse de la galaxie . Le cinquième point représente le noyau de cette galaxie .

Sur cette image , nous devrions voir le cinquième mirage du quasar , quasiment confondu avec le noyau de la galaxie . L'intensité du mirage central étant liée au rayon de coeur de la galaxie , il est quasiment invisible , ce qui nous permet de dire que le rayon de coeur de la galaxie est très petit . Le potentiel se rapproche ainsi de celui d'une masse ponctuelle .

Afin de s'approcher de la configuration observée , nous avons pris les paramètres suivants :

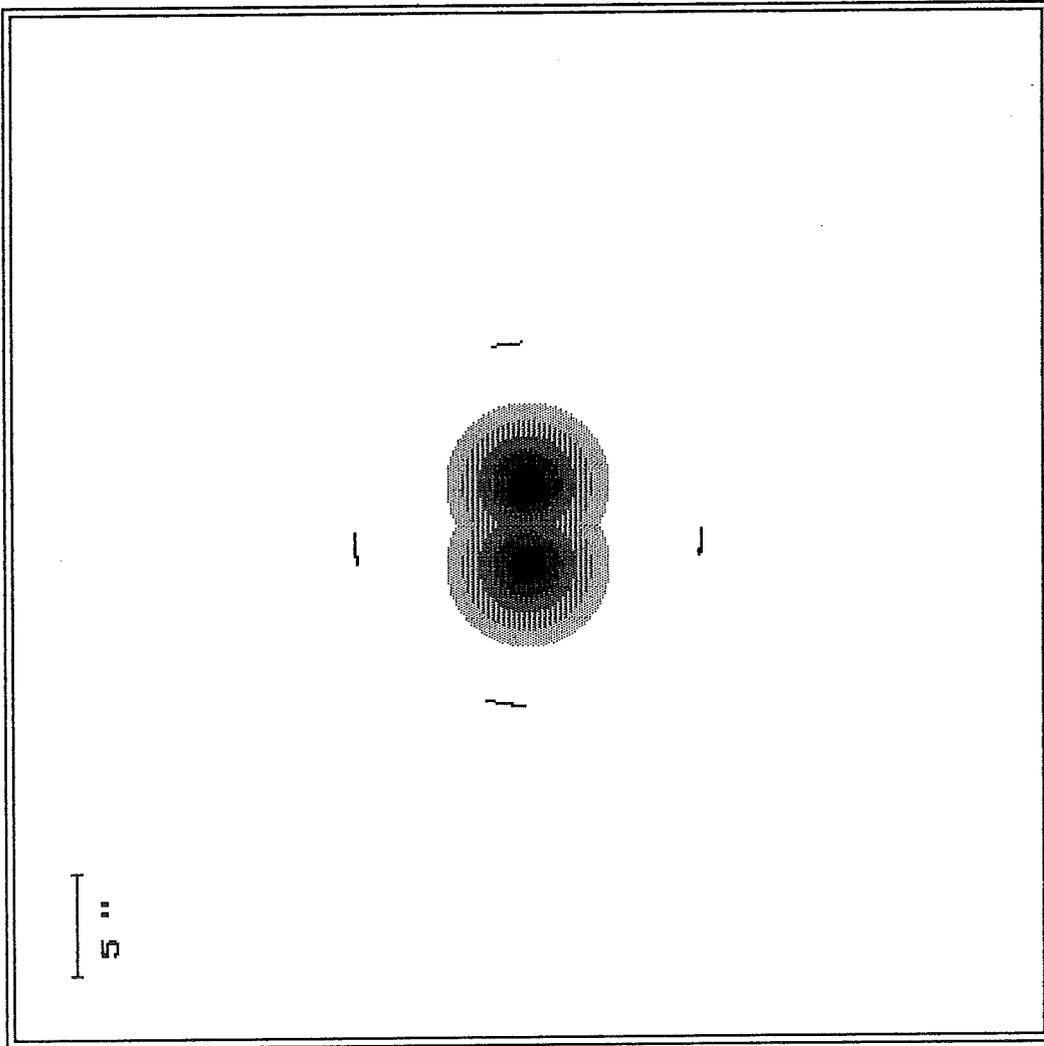
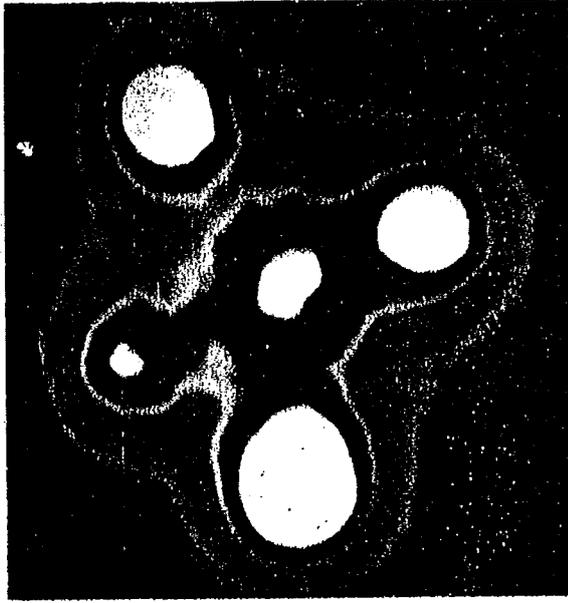
- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 source
- Nombres de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 9.500 et 10.500 milliards de masses solaires
- Distance séparant les 2 galaxies : 4 secondes d'arc
- Situation de la source : 0.1 seconde d'arc au-dessous des deux galaxies

Nous avons donc retrouvé , dans notre simulation , les quatre mirages , que nous observions sur la photographie .

Au centre , nous ne retrouvons pas la cinquième image , probablement à cause d'un défaut d'itération ou d'une dimension trop petite du rayon de coeur .

Nous avons dû donner , pour retrouver cette croix d'Einstein légèrement déformée , des masses aux galaxies sensiblement différentes . Nous pouvons remarquer qu'une différence d'uniquement 10 % suffit à occasionner une déformation très notable de la position des arcs gravitationnels .

Dos : 2.0 Gpc
Do1 : 1.0 Gpc
Ns : 1
Ng : 2



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

AUTRE OBSERVATION

L'image , à droite de la simulation , comporte quatre mirages gravitationnels .

En effet , trois de ces mirages ont la forme de petits arcs et sont situés en bas de l'image. De même , nous observons un quatrième arc situé en haut de l'image , moins étendu que les trois autres . Entre les deux groupes de mirages existent de nombreux points lumineux, représentant des galaxies formant l'amas et constituant la lentille gravitationnelle .

Afin de s'approcher de la configuration observée , nous avons pris les paramètres suivants :

- distance observateur-source : 2 Gigaparsecs
- distance observateur-lentille : 1 Gigaparsec
- Nombre de sources : 1 source
- Nombres de galaxies : 2 galaxies
- Masse des galaxies : 10.000 milliards de masses solaires
- Distance séparant les 2 galaxies : 4 secondes d'arc
- Situation de la source : 0.5 seconde d'arc au-dessous des deux galaxies

Nous retrouvons une configuration quasiment identique pour la position des mirages .

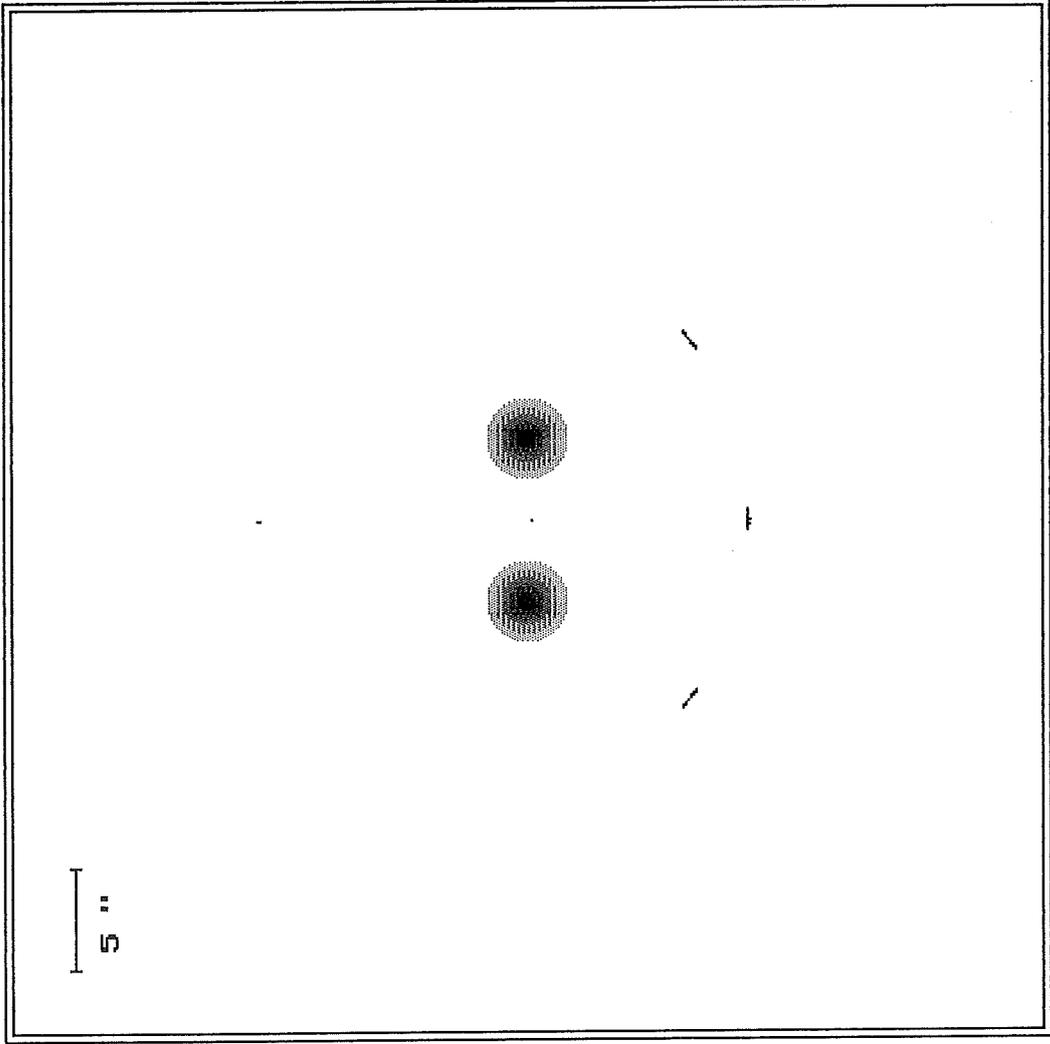
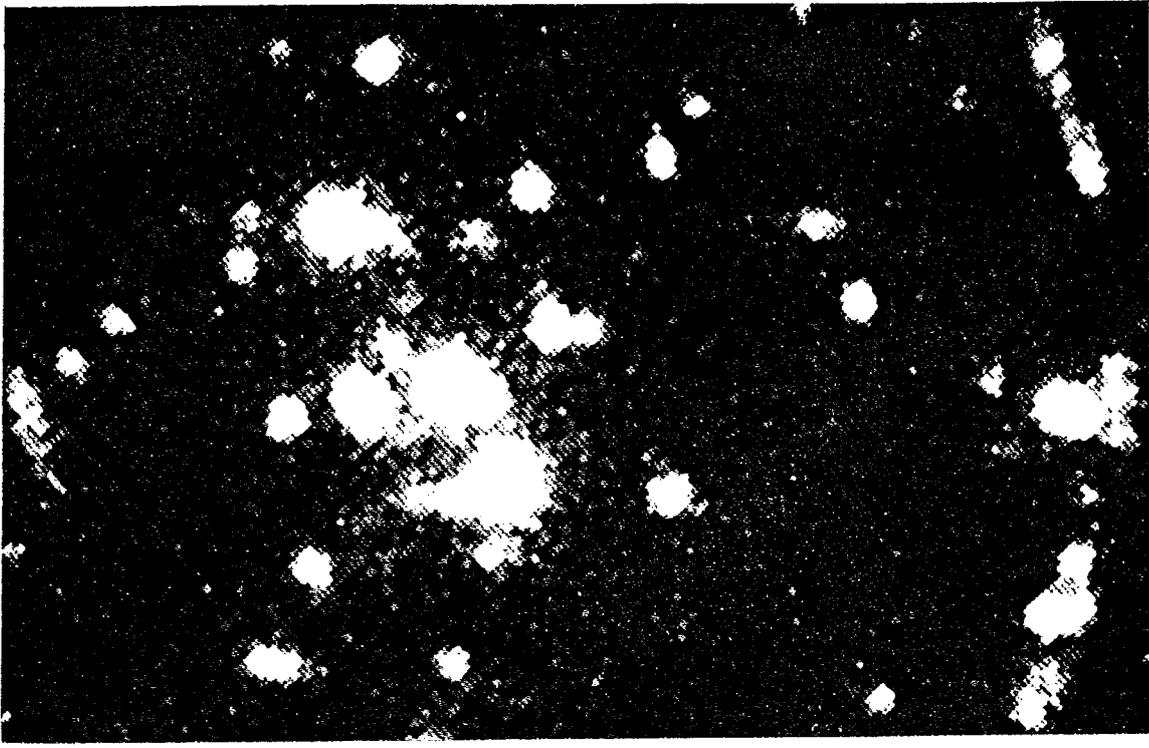
Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que l'étendue des trois arcs situés au-dessous des deux galaxies défectrices sont moins étendus que sur la photographie . Ils sont moins épais et moins larges .

L'épaisseur des arcs est généralement liée à l'étendue de la source . Nous devons donc avoir , dans le cas de notre photographie , une source assez étendue .

La quatrième image , au-dessus des deux galaxies défectrices , est quasiment ponctuelle dans notre simulation , alors qu'elle constitue un véritable arc sur la photographie .

Sur le dessin issu de notre calcul , nous retrouvons la cinquième image , située entre les deux galaxies . Cette image permet de retrouver la propriété de non-parité du nombre de mirages gravitationnels .

Si nous observons notre photographie , nous pouvons remarquer que les mirages gravitationnels sont quasiment symétriques . La répartition de masse dans l'amas est donc parfaitement symétrique , et le potentiel gravitationnel à l'intérieur de l'amas peut alors s'apparenter à un potentiel elliptique , ce qui correspond à la présence de deux galaxies de masses identiques .



Voilà la vision en tenant compte de la déflexion gravitationnelle

VII. APPLICATIONS GENERALES

Nous avons vu , dans les chapitres précédents , que l'optique gravitationnelle était un domaine en pleine expansion à l'heure actuelle .

Devenue une discipline à part entière , l'optique gravitationnelle est un formidable outil d'investigation en astrophysique et en cosmologie .

Peut-être pourrions-nous comparer le développement de cette optique d'un nouveau genre aux travaux de Newton puis Fraunhofer qui conduisirent au perfectionnement du spectrographe . Cet outil , depuis son invention , est toujours considéré comme le plus formidable outil de l'astronome .

Tour à tour moyen de détermination de compositions chimiques , de densités ou de vitesses , le spectrographe reste le premier instrument à installer sur un télescope .

L'utilisation de ces mirages exotiques que sont les mirages gravitationnels permet , comme le spectrographe dans son domaine , de parvenir à la mesure de certains paramètres inconnus dont la mesure était jusqu'à présent impossible de manière rigoureuse .

La première application de l'optique gravitationnelle est la détermination de la masse de l'objet céleste déviant le rayon lumineux .

Nous avons vu , dans le premier exemple de la déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil , que l'angle donnant cette déviation était proportionnelle à la masse , si nous nous plaçons dans certaines approximations .

Connaissant donc l'étendue des mirages , leurs formes , nous sommes en mesure de revenir à la distribution de masse à l'intérieur de l'amas .

Très vite , l'observation des premiers mirages gravitationnels a montré que la masse que nous pensions être celle d'une galaxie ou d'un amas était sous-évaluée . L'étendue de ces arcs nous renseignent ainsi sur la masse totale de la galaxie ou de l'amas , mais aussi sur la densité de la matière invisible , dont l'importance des mirages qu'elle produit trahit l'existence .

Une autre application des lentilles gravitationnelles semble beaucoup intéresser les cosmologues . En effet , les photons , s'ils sont issus d'une même source au même instant , suivent des parcours très différents lorsqu'ils n'apparaissent pas sur le même mirage . Ainsi , chacun ayant suivi un parcours différent , un photon arrivera en retard par rapport à son homologue , pourtant émis au même instant . La mesure de ce retard permettra de déterminer la distance parcourue en plus de ce photon .

Connaissant cette distance , il est alors possible d'estimer la courbure de l'univers à grande échelle , où d'extrapoler certains paramètres astrophysiques comme la constante de Hubble , donnant la distance qui nous sépare d'un objet d'après la vitesse à laquelle il s'éloigne de nous .

En conclusion , l'optique gravitationnelle constitue un nouveau domaine de l'astrophysique qui se développera sans doute dans les années à venir . Le perfectionnement des méthodes de modélisation et la mise en service de télescopes géants parviendront probablement , au cours de la prochaine décennie , à la découverte de nombreux mirages très lointains . Le rêve de Zwicky , cherchant à utiliser les lentilles gravitationnelles comme télescope , est sur le point de devenir réalité ... soixante-dix ans après ses prédictions .

ANNEXES

1) La précession de périhélie

Les planètes ayant une orbite très proche d'une ellipse, la position la plus proche du Soleil atteinte par une planète sur son orbite est appelée la périhélie.

Ce point de plus courte approche voit sa position fluctuer au cours du temps, on dit alors que ce point subit un mouvement de précession, d'où le terme de précession de périhélie.

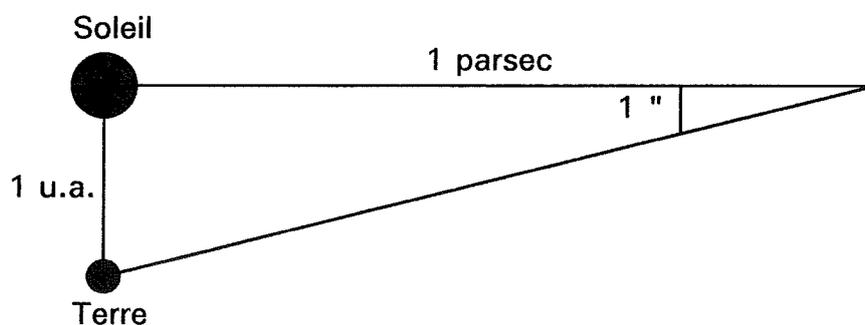
2) Le parsec

Le parsec est probablement l'unité de distance la plus utilisée en astrophysique.

Son origine remonte aux premiers calculs de distances parallaxiques pour déterminer la distance nous séparant des étoiles les plus proches.

La définition du parsec est la suivante :

" Le parsec est la distance séparant un observateur du Soleil où la distance Terre-Soleil apparaît comme un écart angulaire de 1 seconde d'arc, soit $4.86 \cdot 10^{-6}$ radians . "



Comme 1 unité astronomique est égale à 149.6 millions de kilomètres, nous avons :

$$\frac{1 \text{ u.a.}}{1 \text{ parsec}} = \tan(1'')$$

Ou encore :

$$1 \text{ parsec} = \frac{149.6 \cdot 10^9}{\tan(4.86 \cdot 10^{-6})} = 3.078 \cdot 10^{16} \text{ mètres}$$

Comme une année-lumière est la distance parcourue par la lumière en une année, nous avons :

1 année lumière = $9.46 \cdot 10^{15}$ mètres

Ce qui nous permet de déterminer la valeur du parsec en année-lumière :

1 parsec = 3.26 années-lumière

3) La galaxie

La galaxie est un ensemble d'étoiles , réparties généralement sur un disque plat .

Les formes des galaxies sont très diverses ; il existe des galaxies spirales où les étoiles se répartissent préférentiellement dans les bras spiraux , d'autres sont elliptiques dont la forme rappelle souvent le ballon de rugby , certaines ont des contours irréguliers ...

Les galaxies sont donc composées d'étoiles , des centaines voire des milliers de milliards d'étoiles . Elles sont également composées de très grandes masses de gaz interstellaires , contribuant d'une manière non négligeable à la masse de la galaxie . Les galaxies possèdent aussi un halo , très étendu , bien au delà de la frontière visible de la galaxie .

Les masses des galaxies , ces dernières années , ont dû être révisées à la hausse , les mirages gravitationnels observés montrant que la masse des galaxies était largement sous-évaluée , d'un facteur entre 10 et 100 .

4) Le quasar

Le mot " quasar " est la contraction anglaise de l'expression " quasi stellar astronomical radio source " .

Les quasars sont les objets les plus distants que nous observons actuellement , et sont généralement situés à des distances supérieures au Gigaparsec (un milliard de parsecs) . Ces distances ont été déduites à partir de leurs spectres , très décalés vers le rouge .

Leur nature , à l'heure actuelle , n'est pas clairement définie . Cependant , l'hypothèse la plus fiable consisterait à penser que les quasars sont des noyaux très actifs de galaxies , dont la formidable éjection d'énergie serait due à la présence d'un trou noir super-massif .

Généralement observés dans le domaine radio , les quasars envoient de la matière dans deux directions diamétralement opposées . Cette matière est éjectée hors du quasar à une vitesse proche de la vitesse de la lumière .

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Ouvrages de relativité générale :

- **Gravitation and Cosmology** de Steven Weinberg (Wiley)
- **Relativité générale et gravitation** de Edgard Elbaz (Ellipses)
- **Electromagnétisme et gravitation relativistes** de Jean-Claude Boudenot (Ellipses)
- **Relativité et gravitation** de Philippe Tourrenc (Armand Colin)
- **Relativité et quantification** de José-Philippe Perez (Masson)
- **Théorie des champs** de L. Landau & E. Lifchitz (Mir)

Ouvrages d'optique et d'astrophysique :

- **Introduction aux phénomènes optiques** de Pierre Léna (InterEditions)
- **Galaxies et cosmologie** de F. Combes , P. Boissé , A. Mazure et A. Blanchard
(InterEditions)

Articles scientifiques :

- **Gravitational lenses** de R. Blandford & C. Kochanek (? 1986)
- **Quasars multiples et mirages gravitationnels** de C. Vanderriest (Courrier du C.N.R.S.
Images de la physique 1986)
- **Des mirages gravitationnels originaux** de L. Nottale (Courrier du C.N.R.S. Images de la
physique 1988)
- **Mesure du décalage temporel entre les deux images d'un mirage gravitationnel** de
C. Vanderriest , J. Schneider , G. Herpe , M. Chevreton et G. Wléricq (Courrier du
C.N.R.S. Images de la physique 1989)
- **Les lentilles gravitationnelles** de Edwin Turner (Pour la science 1988)

Thèse :

- **Distribution de matière dans les amas de galaxies déduite de l'optique gravitationnelle** de Jean-Paul Kneib (Observatoire de Midi-Pyrénées de Toulouse 1993)